＜ 三角関数と双曲線関数の融合域（その５５）＞ rev1.02

極限公式を新たに六つ見出したので下方に青色式で示す。
なお、同公式は多く出すぎたため、今回のものに関係ないグループは略した。また√2 極限公式は式を示す記号がばらばらであったので＜Ｐ１—１＞～＜Ｐ１—３＞という整ったものに置き換えた。

以降において、L(2)、L(3)、ζ(2)は次の通り。

L(2)＝1 $-1/3^2+1/5^2-1/7^2+-\cdots$＝非明示（カタランの定数）

L(3)はL(3)＝1 $-1/3^3+1/5^3-1/7^3+-\cdots=\pi^3/32$

ζ(2) ＝1 $+1/2^2+1/3^2+1/4^2+\cdots=\pi^2/6$

以降では、双曲線関数 <u>sinh, cosh, tanh はそれぞれ sh, ch, th と略記</u>した。例えば、sh2a は sinh(2a)のことである。a は任意の実数である。$\tan^{-1}$, th^{-1} はそれぞれ arctan, arctanh である。log は自然対数、e は自然対数の底。sin, cos, tan は通常の表記である。

なお、lim での a->+0 は a をプラス側から 0 に近づける意味であり、a->±0 は a をプラス側, マイナス側<u>どちらから 0 に近づけてもＯＫ</u>の意味である。

＝＝＝

＜ 極限公式 ＞

◆$2^{1/2}$ ／$2^{1/4}$ ／2^{-1}／2^2 極限公式

$$\sqrt{2}=\lim_{a\to+0}(1+e^{-a})(1+e^{-3a})^{-1}(1+e^{-5a})(1+e^{-7a})^{-1}(1+e^{-9a})(1+e^{-11a})^{-1}\cdot\cdot$$ ---<P1-1>

$$\sqrt{2}=\lim_{a\to+0}(1+e^{-a})(1+e^{-2a})^{-1}(1+e^{-3a})(1+e^{-4a})^{-1}(1+e^{-5a})(1+e^{-6a})^{-1}\cdot\cdot$$ ---<P1-2>

$$\sqrt{2}=\lim_{a\to\pm0}(1+e^{-2a})^{e^{a}}(1+e^{-6a})^{-e^{3a}}(1+e^{-10a})^{e^{5a}}(1+e^{-14a})^{-e^{7a}}(1+e^{-18a})^{e^{9a}}(1+e^{-22a})^{-e^{11a}}\cdot\cdot$$ --<P1-3>

$$2^{1/4}=\lim_{a\to+0}(1+e^{-a})(1+e^{-2a})^{-2}(1+e^{-3a})^{3}(1+e^{-4a})^{-4}(1+e^{-5a})^{5}(1+e^{-6a})^{-6}\cdot\cdot$$ ---<R2>

$$\frac{1}{2}=\lim_{a\to\pm0}a\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch2a+cos2a}}+\frac{\mathrm{sh2a}}{\mathrm{ch4a+cos2a}}+\frac{\mathrm{sh3a}}{\mathrm{ch6a+cos2a}}+\frac{\mathrm{sh4a}}{\mathrm{ch8a+cos2a}}+\cdot\cdot\right)$$ --<O1−1>

$$\frac{1}{2}=\lim_{a\to+0}\frac{a}{2}\left(\frac{1}{\mathrm{cha+cos\,a}}+\frac{1}{\mathrm{ch2a+cos\,a}}+\frac{1}{\mathrm{ch3a+cos\,a}}+\frac{1}{\mathrm{ch4a+cos\,a}}+\cdot\cdot\right)$$ ---<O1−2>

$$\frac{1}{2}=\lim_{a\to+0}\left(\frac{e^{a}}{2(\mathrm{ch}a+\cos a)}\right)\left(\frac{2(\mathrm{ch}3a+\cos a)}{e^{3a}}\right)\left(\frac{e^{5a}}{2(\mathrm{ch}5a+\cos a)}\right)\left(\frac{2(\mathrm{ch}7a+\cos a)}{e^{7a}}\right)\cdot\cdot$$ --＜O1－3＞

$$\frac{1}{2}=\lim_{a\to+0}\log\left(\frac{1}{(1-a\cdot e^{-a})(1-a\cdot e^{-3a})(1-a\cdot e^{-5a})(1-a\cdot e^{-7a})\cdot\cdot}\right)$$ ---＜O1－4＞

$$\frac{1}{2}=\lim_{a\to+0}\log\left((1+a\cdot e^{-a})(1+a\cdot e^{-3a})(1+a\cdot e^{-5a})(1+a\cdot e^{-7a})\cdot\cdot\right)$$ --＜O1－5＞

$$\frac{1}{2}=\lim_{a\to+0}a\cdot\log\left((1+a\cdot e^{-a})(1+a\cdot e^{-3a})^{3}(1+a\cdot e^{-5a})^{5}(1+a\cdot e^{-7a})^{7}\cdot\cdot\right)$$ --＜O1－6＞

$$\frac{1}{2}=\lim_{a\to+0}a\cdot\log\left(\frac{1}{(1-a\cdot e^{-a})(1-a\cdot e^{-3a})^{3}(1-a\cdot e^{-5a})^{5}(1-a\cdot e^{-7a})^{7}\cdot\cdot}\right)$$ ---＜O1－7＞

$$\frac{1}{2}=\lim_{a\to+0}\log\left((1+a^{2}\cdot e^{-a})(1+a^{2}\cdot e^{-3a})^{3}(1+a^{2}\cdot e^{-5a})^{5}(1+a^{2}\cdot e^{-7a})^{7}\cdot\cdot\right)$$ --＜O1－8＞

$$4=\lim_{a\to+0}\left(\frac{\mathrm{ch}a+\sin a}{\mathrm{ch}a-\sin a}\right)^{e^{-a}}\left(\frac{\mathrm{ch}2a+\sin a}{\mathrm{ch}2a-\sin a}\right)^{e^{-2a}}\left(\frac{\mathrm{ch}3a+\sin a}{\mathrm{ch}3a-\sin a}\right)^{e^{-3a}}\left(\frac{\mathrm{ch}4a+\sin a}{\mathrm{ch}4a-\sin a}\right)^{e^{-4a}}\cdot\cdot$$ --＜Q1＞

◆L(2)極限公式

$$L(2)=\lim_{a\to\pm0}a\left(\tan^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{sh}a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{sh}3a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{sh}5a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{sh}7a}\right)+\cdot\cdot\right)$$ ---＜S1＞

$$L(2)=\lim_{a\to\pm0}a^{2}\left(\frac{2}{\mathrm{ch}2a}+\frac{4}{\mathrm{ch}4a}+\frac{6}{\mathrm{ch}6a}+\frac{8}{\mathrm{ch}8a}+\cdot\cdot\right)$$ ----＜S1－2＞

$$L(2)=\lim_{a\to\pm0}a^{2}\left(\frac{1}{\mathrm{ch}a}+\frac{3}{\mathrm{ch}3a}+\frac{5}{\mathrm{ch}5a}+\frac{7}{\mathrm{ch}7a}+\cdot\cdot\right)$$ ----＜S1－3＞

$$L(2)=\lim_{a\to\pm0}a\left(\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{sh}a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{sh}3a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{sh}5a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{sh}7a}\right)+\cdot\cdot\right)$$ --＜S1－4＞

$$L(2)=\lim_{a\to\pm0}2a\left(\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{sh}2a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{sh}6a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{sh}10a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{sh}14a}\right)+\cdot\cdot\right)$$ --＜S1－5＞

$$L(2)=\lim_{a\to\pm 0} a\left(\tan^{-1}\left(\frac{\cos a}{\mathrm{sh}a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\cos a}{\mathrm{sh}3a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\cos a}{\mathrm{sh}5a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\cos a}{\mathrm{sh}7a}\right)+\cdot\cdot\right)$$ --<S1−6>

$$L(2)=\lim_{a\to\pm 0} a\left(\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}a}\right)+3\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}3a}\right)+5\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}5a}\right)+7\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}7a}\right)+\cdot\cdot\right)$$ --<S1−7>

$$L(2)=\lim_{a\to\pm 0} a\left(\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\sin a}{\mathrm{ch}a}\right)+3\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\sin a}{\mathrm{ch}3a}\right)+5\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\sin a}{\mathrm{ch}5a}\right)+7\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\sin a}{\mathrm{ch}7a}\right)+\cdot\cdot\right)$$ --<S1−8>

$$L(2)=\lim_{a\to\pm 0} 2a\left(\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{sh}4a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{sh}8a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{sh}12a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{sh}16a}\right)+\cdot\cdot\right)$$ --<S1−9>

$$L(2)=\lim_{a\to\pm 0} 2a^2\left(\frac{1}{\mathrm{ch}3a}+\frac{2}{\mathrm{ch}5a}+\frac{3}{\mathrm{ch}7a}+\frac{4}{\mathrm{ch}9a}+\frac{5}{\mathrm{ch}11a}+\frac{6}{\mathrm{ch}13a}+\cdot\cdot\right)$$ ----<S1−10>

$$L(2)=\lim_{a\to\pm 0} \frac{a}{2}\left(\tan^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{sh}a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{sh}2a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{sh}3a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{sh}4a}\right)+\cdot\cdot\right)$$ --<S1−11>

$$L(2)=\lim_{a\to +0} 2a\left(\tan^{-1}\left(\frac{1}{e^{a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{e^{3a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{e^{5a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{e^{7a}}\right)+\cdot\cdot\right)$$ --<S1−12>

$$L(2)=\lim_{a\to +0} a\left(\tan^{-1}\left(\frac{1}{e^{a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{e^{2a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{e^{3a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{e^{4a}}\right)+\cdot\cdot\right)$$ --<S1−13>

$$L(2)=\lim_{a\to\pm 0} \frac{a^2}{2}\left(\frac{1}{\mathrm{ch}2a}+\frac{2}{\mathrm{ch}3a}+\frac{3}{\mathrm{ch}4a}+\frac{4}{\mathrm{ch}5a}+\cdot\cdot\right)$$ ----<S1−14>

$$L(2)=\lim_{a\to +0} \frac{a}{4}\log\left(\left(\frac{\mathrm{ch}2a+\sin a}{\mathrm{ch}2a-\sin a}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}3a+\sin a}{\mathrm{ch}3a-\sin a}\right)^2\left(\frac{\mathrm{ch}4a+\sin a}{\mathrm{ch}4a-\sin a}\right)^3\left(\frac{\mathrm{ch}5a+\sin a}{\mathrm{ch}5a-\sin a}\right)^4\cdot\cdot\right)$$ --<S1−15>

$$L(2)=\lim_{a\to\pm 0} \frac{a^3}{4}\left(\frac{2\times 1\mathrm{sh}2a}{\mathrm{ch}^2 2a}+\frac{3\times 2\mathrm{sh}3a}{\mathrm{ch}^2 3a}+\frac{4\times 3\mathrm{sh}4a}{\mathrm{ch}^2 4a}+\frac{5\times 4\mathrm{sh}5a}{\mathrm{ch}^2 5a}+\cdot\cdot\right)$$ ---<S1−16>

◆$\frac{\pi^2}{6}$極限公式（ξ(2)極限公式）

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to +0} a\cdot\log\left(\frac{1}{(1-e^{-a})(1-e^{-2a})(1-e^{-3a})(1-e^{-4a})\cdot\cdot}\right)$$ ----<S3>

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0} 2a^3\left(\frac{1^2}{ch^2a}+\frac{2^2}{ch^2 2a}+\frac{3^2}{ch^2 3a}+\frac{4^2}{ch^2 4a}+\cdot\cdot\right) \quad \text{---<S3−2>}$$

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0} a^3\left(\frac{1^2}{sh^2a}+\frac{2^2}{sh^2 2a}+\frac{3^2}{sh^2 3a}+\frac{4^2}{sh^2 4a}+\cdot\cdot\right) \quad \text{---<S3−3>}$$

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0} 4a^2\left(\frac{1}{e^a+1}+\frac{3}{e^{3a}+1}+\frac{5}{e^{5a}+1}+\frac{7}{e^{7a}+1}+\cdot\cdot\right) \quad \text{----<S3−4>}$$

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0} 2a^2\left(\frac{1}{e^a-1}+\frac{3}{e^{3a}-1}+\frac{5}{e^{5a}-1}+\frac{7}{e^{7a}-1}+\cdot\cdot\right) \quad \text{----<S3−5>}$$

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0} 4a^2\left(\frac{1}{e^{2a}-1}+\frac{2}{e^{4a}-1}+\frac{3}{e^{6a}-1}+\frac{4}{e^{8a}-1}+\cdot\cdot\right) \quad \text{----<S3−6>}$$

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0} 4a^3\left(\frac{1^2}{ch^2a}+\frac{3^2}{ch^2 3a}+\frac{5^2}{ch^2 5a}+\frac{7^2}{ch^2 7a}+\cdot\cdot\right) \quad \text{---<S3−7>}$$

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0} 2a^3\left(\frac{1^2}{sh^2a}+\frac{3^2}{sh^2 3a}+\frac{5^2}{sh^2 5a}+\frac{7^2}{sh^2 7a}+\cdot\cdot\right) \quad \text{---<S3−8>}$$

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0} 2a^2\left(\frac{1}{e^a+1}+\frac{2}{e^{2a}+1}+\frac{3}{e^{3a}+1}+\frac{4}{e^{4a}+1}+\cdot\cdot\right) \quad \text{----<S3−9>}$$

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0} 4a\cdot\log\left((1+e^{-a})(1+e^{-3a})(1+e^{-5a})(1+e^{-7a})\cdot\cdot\right) \quad \text{----<S3−10>}$$

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0} 2a\cdot\log\left(\frac{1}{(1-e^{-a})(1-e^{-3a})(1-e^{-5a})(1-e^{-7a})\cdot\cdot}\right) \quad \text{----<S3−11>}$$

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0} a\cdot\log\left(2(1+e^{-a})^2(1+e^{-2a})^2(1+e^{-3a})^2(1+e^{-4a})^2\cdot\cdot\right) \quad \text{----<S3−12>}$$

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0} 2a^2\left(\left(\frac{1}{th2a}-1\right)+2\left(\frac{1}{th3a}-1\right)+3\left(\frac{1}{th4a}-1\right)+4\left(\frac{1}{th5a}-1\right)+\cdot\cdot\right) \quad \text{--<S3−13>}$$

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0} 4a^2\left((1-th2a)+2(1-th3a)+3(1-th4a)+4(1-th5a)+\cdot\cdot\right) \quad \text{--<S3−14>}$$

◆ $\frac{\pi^3}{32}$極限公式　(L(3)極限公式)

$$\frac{\pi^3}{32}=\lim_{a\to+0} 2a^3\left(\frac{1^2}{\mathrm{ch}2a}+\frac{2^2}{\mathrm{ch}4a}+\frac{3^2}{\mathrm{ch}6a}+\frac{4^2}{\mathrm{ch}8a}+\cdot\ \cdot\right)$$
------＜S7－1＞

$$\frac{\pi^3}{32}=\lim_{a\to+0} 2a^2\left(\tan^{-1}(e^{-a})+3\tan^{-1}(e^{-3a})+5\tan^{-1}(e^{-5a})+7\tan^{-1}(e^{-7a})+\cdot\ \cdot\right)$$
--＜S7－2＞

$$\frac{\pi^3}{32}=\lim_{a\to+0} a^2\left(\tan^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{sh}a}\right)+3\tan^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{sh}3a}\right)+5\tan^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{sh}5a}\right)+7\tan^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{sh}7a}\right)+\cdot\ \cdot\right)$$
--＜S7－3＞

$$\frac{\pi^3}{32}=\lim_{a\to+0} a^2\left(\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{sh}a}\right)+3\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{sh}3a}\right)+5\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{sh}5a}\right)+7\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{sh}7a}\right)+\cdot\ \cdot\right)$$
--＜S7－4＞

$$\frac{\pi^3}{32}=\lim_{a\to+0} 2a^2\left(\tan^{-1}(e^{-2a})+3\tan^{-1}(e^{-4a})+5\tan^{-1}(e^{-6a})+7\tan^{-1}(e^{-8a})+\cdot\ \cdot\right)$$
--＜S7－5＞

$$\frac{\pi^3}{32}=\lim_{a\to+0} 2a^2\left(\tan^{-1}(1)+3\tan^{-1}(e^{-2a})+5\tan^{-1}(e^{-4a})+7\tan^{-1}(e^{-6a})+\cdot\ \cdot\right)$$
--＜S7－6＞

$$\frac{\pi^3}{32}=\lim_{a\to+0} 2a^2\left(\tan^{-1}(e^{a})+3\tan^{-1}(e^{-a})+5\tan^{-1}(e^{-3a})+7\tan^{-1}(e^{-5a})+\cdot\ \cdot\right)$$
--＜S7－7＞

$$\frac{\pi^3}{32}=\lim_{a\to+0} 2a^3\left(\frac{2\times1}{\mathrm{ch}5a}+\frac{3\times2}{\mathrm{ch}7a}+\frac{4\times3}{\mathrm{ch}9a}+\frac{5\times4}{\mathrm{ch}11a}+\frac{6\times5}{\mathrm{ch}13a}+\frac{7\times6}{\mathrm{ch}15a}+\cdot\ \cdot\right)$$
--＜S7－8＞

$$\frac{\pi^3}{32}=\lim_{a\to+0} 4a^3\left(\frac{2\times1\mathrm{ch}5a}{\mathrm{ch}10a+\mathrm{ch}a}+\frac{3\times2\mathrm{ch}7a}{\mathrm{ch}14a+\mathrm{ch}a}+\frac{4\times3\mathrm{ch}9a}{\mathrm{ch}18a+\mathrm{ch}a}+\frac{5\times4\mathrm{ch}11a}{\mathrm{ch}22a+\mathrm{ch}a}+\cdot\ \cdot\right)$$
---＜S7－9＞

$$\frac{\pi^3}{32}=\lim_{a\to+0} 2a^2\left(\tan^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{sh}3a}\right)+2\tan^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{sh}5a}\right)+3\tan^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{sh}7a}\right)+4\tan^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{sh}9a}\right)+\cdot\ \cdot\right)$$
--＜S7－１０＞

$$\frac{\pi^3}{32}=\lim_{a\to+0}\frac{a^3}{4}\left(\frac{2\times1}{\mathrm{ch}3a}+\frac{3\times2}{\mathrm{ch}4a}+\frac{4\times3}{\mathrm{ch}5a}+\frac{5\times4}{\mathrm{ch}6a}+\frac{6\times5}{\mathrm{ch}7a}+\frac{7\times6}{\mathrm{ch}8a}+\cdot\ \cdot\right)$$
---＜S7－11＞

$$\frac{\pi^3}{32}=\lim_{a\to+0}\frac{a^2}{8}\log\left(\left(\frac{\mathrm{ch}3a+\sin a}{\mathrm{ch}3a-\sin a}\right)^{2\times1}\left(\frac{\mathrm{ch}4a+\sin a}{\mathrm{ch}4a-\sin a}\right)^{3\times2}\left(\frac{\mathrm{ch}5a+\sin a}{\mathrm{ch}5a-\sin a}\right)^{4\times3}\left(\frac{\mathrm{ch}6a+\sin a}{\mathrm{ch}6a-\sin a}\right)^{5\times4}\cdot\ \cdot\right)$$
--＜S7－12＞

$$\frac{\pi^3}{32}=\lim_{a\to+0} 2a^2\left(2\times1\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}6a}\right)+3\times2\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}8a}\right)+4\times3\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}10a}\right)+5\times4\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}12a}\right)+\cdot\ \cdot\right)$$
--＜S7－１３＞

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

上記の六つの青色式が得られた。Wolfram Alpha での数値検証でも式の成立を確認している。

今回のものでもっともシンプルできれいなものは次の二式であろう。

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0}2a^2\left(\left(\frac{1}{\mathrm{th}2a}-1\right)+2\left(\frac{1}{\mathrm{th}3a}-1\right)+3\left(\frac{1}{\mathrm{th}4a}-1\right)+4\left(\frac{1}{\mathrm{th}5a}-1\right)+\cdot\cdot\right)\quad \text{--<S3－１３>}$$

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0}4a^2\Big((1-\mathrm{th}2a)+2(1-\mathrm{th}3a)+3(1-\mathrm{th}4a)+4(1-\mathrm{th}5a)+\cdot\cdot\Big)\quad \text{--<S3－１４>}$$

これらは証明の上からも兄弟の関係にある。この二式の証明を以下に示す。詳細な式変形は飛ばした。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

<S3－１３>、<S3－１４>の証明

下式[1]の左辺から出発する。その左辺を１３年前のこちらの 2012/8/16 の[導出]と類似的な方法を使って変形していくと[1]の右辺に到達する。途中でゼータの香りの漂う・・（その３８１）でのフーリエ級数の④を使う。（注意：フーリエ級数の表現を使っているが、それらは恒等式である） この[1]は三変数の恒等式となっている。

$$\frac{\cos x}{e^a-\alpha}-\frac{\cos 2x}{e^{2a}-\alpha}+\frac{\cos 3x}{e^{3a}-\alpha}-\frac{\cos 4x}{e^{4a}-\alpha}+-\cdot\cdot=(1/2)\left(\left(1-\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}a+\cos x}\right)+\alpha\left(1-\frac{\mathrm{sh}2a}{\mathrm{ch}2a+\cos x}\right)+\alpha^2\left(1-\frac{\mathrm{sh}3a}{\mathrm{ch}3a+\cos x}\right)+\alpha^3\left(1-\frac{\mathrm{sh}4a}{\mathrm{ch}4a+\cos x}\right)+\cdot\cdot\right)\quad \text{--[1]}$$

$(a>0,\ |\alpha|\leqq 1,\ x$ は任意$)$

[1]を α で微分して、次式を得る。

$$\frac{\cos x}{(e^a-\alpha)^2}-\frac{\cos 2x}{(e^{2a}-\alpha)^2}+\frac{\cos 3x}{(e^{3a}-\alpha)^2}-\frac{\cos 4x}{(e^{4a}-\alpha)^2}+-\cdot\cdot=\left(\frac{1}{2}\right)\left(\left(1-\frac{\mathrm{sh}2a}{\mathrm{ch}2a+\cos x}\right)+2\alpha\left(1-\frac{\mathrm{sh}3a}{\mathrm{ch}3a+\cos x}\right)+3\alpha^2\left(1-\frac{\mathrm{sh}4a}{\mathrm{ch}4a+\cos x}\right)+4\alpha^3\left(1-\frac{\mathrm{sh}5a}{\mathrm{ch}5a+\cos x}\right)\cdot\cdot\right)\quad \text{--[2]}$$

[2]の x に π を、α に 1 を代入して整理すると、次となる。

$$\frac{1}{(e^a-1)^2}+\frac{1}{(e^{2a}-1)^2}+\frac{1}{(e^{3a}-1)^2}+\frac{1}{(e^{4a}-1)^2}+\cdot\cdot=\left(\frac{1}{2}\right)\left(\left(\frac{1}{\mathrm{th}a}-1\right)+2\left(\frac{1}{\mathrm{th}(3a/2)}-1\right)+3\left(\frac{1}{\mathrm{th}(2a)}-1\right)+4\left(\frac{1}{\mathrm{th}(5a/2)}-1\right)+\cdot\cdot\right)\quad \text{--[2]-1}$$

$(a>0)$

この両辺に a^2 を掛けて（左辺は各項に掛ける）、a を+側から 0 に近づけていく。左辺にロピタルの定理を適用し（左辺は $1+1/2^2+1/3^2+$・・となり）、最後に a を 2a で置き換えて、目標の＜Ｓ３－１３＞に到達する。

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0}2a^2\left(\left(\frac{1}{\mathrm{th}2a}-1\right)+2\left(\frac{1}{\mathrm{th}3a}-1\right)+3\left(\frac{1}{\mathrm{th}4a}-1\right)+4\left(\frac{1}{\mathrm{th}5a}-1\right)+\cdot\cdot\right)\quad \text{--<S3－１３>}$$

また[2]の x に $\pi/2$ を、α に 1 を代入して整理すると、次となる。

$$\frac{1}{(e^{2a}-1)^2}-\frac{1}{(e^{4a}-1)^2}+\frac{1}{(e^{6a}-1)^2}-\frac{1}{(e^{8a}-1)^2}+-\cdot\cdot=\left(\frac{1}{2}\right)\Big((1-\mathrm{th}2a)+2(1-\mathrm{th}3a)+3(1-\mathrm{th}4a)+4(1-\mathrm{th}5a)+\cdot\cdot\Big)\quad \text{--[2]-2}$$

$(a>0)$

この両辺に a^2 を掛けて（左辺は各項に掛ける）、a を+側から 0 に近づけていく。左辺にロピタルの定理を適用し、目標の＜Ｓ３－１４＞に到達する。

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0}4a^2\Big((1-\mathrm{th}2a)+2(1-\mathrm{th}3a)+3(1-\mathrm{th}4a)+4(1-\mathrm{th}5a)+\cdot\cdot\Big)\quad \text{--<S3－１４>}$$

終わり。
＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

このようにして＜Ｓ３―１３＞と＜Ｓ３—１４＞が得られた。かなり略した証明となったが、流れはこのようになる。証明のポイントは、[2]-1 や[2]-2 の両辺にわざわざ a^2 を掛ける（左辺は各項に掛ける）点である。今回の式は α で微分したことから生まれた点にも着目したい。二変数域では α という変数(パラメータ)はなかった（α は 1）。すなわち＜Ｓ３―１３＞と＜Ｓ３—１４＞は[1]が三変数の母等式だから出たともいえる。

最後に、気になる点や想うことなど述べておく。
＝＝＝

●証明から＜Ｓ３―１３＞と＜Ｓ３―１４＞は[2]という同じ母親から生まれていることがわかる。これが、両式は兄弟の関係にあるといった意味である。

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0} 2a^2\left(\left(\frac{1}{\mathrm{th}2a}-1\right)+2\left(\frac{1}{\mathrm{th}3a}-1\right)+3\left(\frac{1}{\mathrm{th}4a}-1\right)+4\left(\frac{1}{\mathrm{th}5a}-1\right)+\cdot\cdot\right) \quad \text{--<S3－１３>}$$

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0} 4a^2\Big((1-\mathrm{th}2a)+2(1-\mathrm{th}3a)+3(1-\mathrm{th}4a)+4(1-\mathrm{th}5a)+\cdot\cdot\Big) \quad \text{--<S3－１４>}$$

これらは眺めがよい。。

●証明中の[1]を再掲。

$$\frac{\cos x}{e^{a}-\alpha}-\frac{\cos 2x}{e^{2a}-\alpha}+\frac{\cos 3x}{e^{3a}-\alpha}-\frac{\cos 4x}{e^{4a}-\alpha}+-\cdot\cdot=(1/2)\left(\left(1-\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}a+\cos x}\right)+\alpha\left(1-\frac{\mathrm{sh}2a}{\mathrm{ch}2a+\cos x}\right)+\alpha^2\left(1-\frac{\mathrm{sh}3a}{\mathrm{ch}3a+\cos x}\right)+\alpha^3\left(1-\frac{\mathrm{sh}4a}{\mathrm{ch}4a+\cos x}\right)+\cdot\cdot\right) \quad \text{--[1]}$$

$(a>0,\ |\alpha|\leqq 1,\ x$ は任意$)$

これは数ある母等式の中の一つである。私の分類では、三変数・別種２基本フーリエ Cos 母等式というものになるのだが、この一つの根から大樹が育っていく。x でも a でも α でも微分できるし(何度でも OK)、α で積分したり、変数に色々な値が代入でき、x に純虚数を代入したら虚数乗法で優美な式が出てくるし・・で、目が回り、無限の変化がある。そんな感じで三角関数と双曲線関数の融合域の三変数域は広大無辺である。二変数域では α のパラメータがないから（α=1）、変化は三変数域より抑えられている（二変数域もでかい森だが・・）。いつも私が三変数域はあまりに巨大！！と言うのは、そのような理由からである。組み合わせが多いため豊かなものが出てくる。豊かさは組み合わせの多様さに関係する。ここでは、さまざまな素材を組み合わせていろいろなデザインを生み出しているような感覚がある。

●上記のような状況だから、ノートではその複雑な状況を整理していくのがたいへんである。数学では整理整頓が命である。つねに整理整頓しておかないとすぐにわけのわからない状況になってしまう。基本母等式やそこから派生した式を近くの見える位置に（一番使いやすい位置に）持ってくる、つまり書き写すという作業を頻繁に行う。それはたいくつ極まりない作業だけれどもそうしないとどうもだめである。創造とは退屈とも関係している。工業製品の生産現場でも近くに道具が整理整頓されて設置されていないとよい物ができない。数

学も日常の仕事もなんらちがいがない。またノートを整理しておくと過去のものを見直す際も便利である。見直した際、見落としてきたことを発見することがよくある・・

●証明中の[2]-1 と[2]-2 を並べよう。ただし[2]-1 は a を 2a で置き換えた（姿を整えた）。

$$\frac{1}{(e^{2a}-1)^2}+\frac{1}{(e^{4a}-1)^2}+\frac{1}{(e^{6a}-1)^2}+\frac{1}{(e^{8a}-1)^2}+\cdot\cdot=\left(\frac{1}{2}\right)\left(\left(\frac{1}{\mathrm{th}2a}-1\right)+2\left(\frac{1}{\mathrm{th}3a}-1\right)+3\left(\frac{1}{\mathrm{th}4a}-1\right)+4\left(\frac{1}{\mathrm{th}5a}-1\right)+\cdot\cdot\right)\quad\text{--[2]-1}$$

$$(a>0)$$

$$\frac{1}{(e^{2a}-1)^2}-\frac{1}{(e^{4a}-1)^2}+\frac{1}{(e^{6a}-1)^2}-\frac{1}{(e^{8a}-1)^2}+-\cdot\cdot=\left(\frac{1}{2}\right)\left((1-\mathrm{th}2a)+2(1-\mathrm{th}3a)+3(1-\mathrm{th}4a)+4(1-\mathrm{th}5a)+\cdot\cdot\right)\quad\text{--[2]-2}$$

$$(a>0)$$

　これ自体すばらしい恒等式といえる。下式の左辺は交代級数になっている。どちらもゼータの香りが漂っている。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

2025.11.22 杉岡幹生

sugioka_m@mvb.biglobe.ne.jp

＜参考文献＞

・「マグロウヒル　数学公式・数表ハンドブック」(Murray R. Spiegel 著、氏家勝巳訳、オーム社)

＜改訂＞ Rev.1.01　証明で２か所書き損じを訂正した。2025.11.22

＜改訂＞ Rev.1.02　証明でさらに１か所書き損じ([2]-2 式の交代級数の符号の書き間違い)を訂正した。2025.11.23