

＜ 三角関数と双曲線関数の融合域（その 5 4） ＞

極限公式を新たに八つ見出したので下方に青色式で示す。なお、同公式は多く出すぎたため、今回のものに関係ないグループは略した（ただし比較のため e^π 極限公式は示した）。関係のあるグループは過去のものすべて示した。ζ (3) の＜ S 6－7 ＞は比較のため同値変形した。

以降において、L (1) ～ L (5)、ζ (3) ～ ζ (5) は次の通り。

$$L(1) = 1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + \dots = \pi/4$$

$$L(2) = 1 - 1/3^2 + 1/5^2 - 1/7^2 + \dots = \text{非明示（カタランの定数）}$$

$$L(3) \text{ は } L(3) = 1 - 1/3^3 + 1/5^3 - 1/7^3 + \dots = \pi^3/32$$

$$L(4) = 1 - 1/3^4 + 1/5^4 - 1/7^4 + \dots = \text{非明示}$$

$$L(5) \text{ は } L(5) = 1 - 1/3^5 + 1/5^5 - 1/7^5 + \dots = 5\pi^5/1536$$

$$\zeta(3) = 1 + 1/2^3 + 1/3^3 + 1/4^3 + \dots = \text{非明示}$$

$$\zeta(4) = 1 + 1/2^4 + 1/3^4 + 1/4^4 + \dots = \pi^4/90$$

$$\zeta(5) = 1 + 1/2^5 + 1/3^5 + 1/4^5 + \dots = \text{非明示}$$

以降では、双曲線関数 sinh, cosh, tanh はそれぞれ sh, ch, th と略記した。例えば、sh2a は sinh (2a) のことである。a は任意の実数である。tan⁻¹, th⁻¹ はそれぞれ arctan, arctanh である。log は自然対数、e は自然対数の底。sin, cos, tan は通常の表記である。

なお、lim での a→+0 は a をプラス側から 0 に近づける意味であり、a→±0 は a をプラス側, マイナス側 どちらから 0 に近づけても OK の意味である。

=====

＜ 極限公式 ＞

◆L(2)極限公式

$$L(2) = \lim_{a \rightarrow \pm 0} a \left(\tan^{-1} \left(\frac{1}{\text{sha}} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{1}{\text{sh3a}} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{1}{\text{sh5a}} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{1}{\text{sh7a}} \right) + \dots \right) \quad \text{---<S1>}$$

$$L(2) = \lim_{a \rightarrow \pm 0} a^2 \left(\frac{2}{\text{ch2a}} + \frac{4}{\text{ch4a}} + \frac{6}{\text{ch6a}} + \frac{8}{\text{ch8a}} + \dots \right) \quad \text{----<S1-2>}$$

$$L(2) = \lim_{a \rightarrow \pm 0} a^2 \left(\frac{1}{\text{cha}} + \frac{3}{\text{ch3a}} + \frac{5}{\text{ch5a}} + \frac{7}{\text{ch7a}} + \dots \right) \quad \text{----<S1-3>}$$

$$L(2) = \lim_{a \rightarrow \pm 0} a \left(\tan^{-1} \left(\frac{\text{cha}}{\text{sha}} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{\text{cha}}{\text{sh3a}} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{\text{cha}}{\text{sh5a}} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{\text{cha}}{\text{sh7a}} \right) + \dots \right) \quad \text{--<S1-4>}$$

$$L(2) = \lim_{a \rightarrow \pm 0} 2a \left(\tan^{-1} \left(\frac{\text{cha}}{\text{sh2a}} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{\text{cha}}{\text{sh6a}} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{\text{cha}}{\text{sh10a}} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{\text{cha}}{\text{sh14a}} \right) + \dots \right) \quad \text{--<S1-5>}$$

$$L(2)=\lim_{a\rightarrow\pm 0} a\left(\tan^{-1}\left(\frac{\cos a}{\operatorname{sha}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\cos a}{\operatorname{sh3a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\cos a}{\operatorname{sh5a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\cos a}{\operatorname{sh7a}}\right)+\cdot\cdot\right) \quad --<S1-6>$$

$$L(2)=\lim_{a\rightarrow\pm 0} a\left(\tan^{-1}\left(\frac{\operatorname{sha}}{\operatorname{cha}}\right)+3\tan^{-1}\left(\frac{\operatorname{sha}}{\operatorname{ch3a}}\right)+5\tan^{-1}\left(\frac{\operatorname{sha}}{\operatorname{ch5a}}\right)+7\tan^{-1}\left(\frac{\operatorname{sha}}{\operatorname{ch7a}}\right)+\cdot\cdot\right) \quad --<S1-7>$$

$$L(2)=\lim_{a\rightarrow\pm 0} a\left(\operatorname{th}^{-1}\left(\frac{\operatorname{sina}}{\operatorname{cha}}\right)+3\operatorname{th}^{-1}\left(\frac{\operatorname{sina}}{\operatorname{ch3a}}\right)+5\operatorname{th}^{-1}\left(\frac{\operatorname{sina}}{\operatorname{ch5a}}\right)+7\operatorname{th}^{-1}\left(\frac{\operatorname{sina}}{\operatorname{ch7a}}\right)+\cdot\cdot\right) \quad --<S1-8>$$

$$L(2)=\lim_{a\rightarrow\pm 0} 2a\left(\tan^{-1}\left(\frac{\operatorname{cha}}{\operatorname{sh4a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\operatorname{cha}}{\operatorname{sh8a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\operatorname{cha}}{\operatorname{sh12a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\operatorname{cha}}{\operatorname{sh16a}}\right)+\cdot\cdot\right) \quad --<S1-9>$$

$$L(2)=\lim_{a\rightarrow\pm 0} 2a^2\left(\frac{1}{\operatorname{ch3a}}+\frac{2}{\operatorname{ch5a}}+\frac{3}{\operatorname{ch7a}}+\frac{4}{\operatorname{ch9a}}+\frac{5}{\operatorname{ch11a}}+\frac{6}{\operatorname{ch13a}}+\cdot\cdot\right) \quad ----<S1-10>$$

$$L(2)=\lim_{a\rightarrow\pm 0} \frac{a}{2}\left(\tan^{-1}\left(\frac{1}{\operatorname{sha}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{\operatorname{sh2a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{\operatorname{sh3a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{\operatorname{sh4a}}\right)+\cdot\cdot\right) \quad --<S1-11>$$

$$L(2)=\lim_{a\rightarrow+0} 2a\left(\tan^{-1}\left(\frac{1}{e^a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{e^{3a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{e^{5a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{e^{7a}}\right)+\cdot\cdot\right) \quad --<S1-12>$$

$$L(2)=\lim_{a\rightarrow+0} a\left(\tan^{-1}\left(\frac{1}{e^a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{e^{2a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{e^{3a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{e^{4a}}\right)+\cdot\cdot\right) \quad --<S1-13>$$

$$L(2)=\lim_{a\rightarrow\pm 0} \frac{a^2}{2}\left(\frac{1}{\operatorname{ch2a}}+\frac{2}{\operatorname{ch3a}}+\frac{3}{\operatorname{ch4a}}+\frac{4}{\operatorname{ch5a}}+\cdot\cdot\right) \quad ----<S1-14>$$

$$L(2)=\lim_{a\rightarrow+0} \frac{a}{4}\log\left(\frac{(\operatorname{ch2a}+\operatorname{sina})(\operatorname{ch3a}+\operatorname{sina})^2(\operatorname{ch4a}+\operatorname{sina})^3(\operatorname{ch5a}+\operatorname{sina})^4}{(\operatorname{ch2a}-\operatorname{sina})(\operatorname{ch3a}-\operatorname{sina})^2(\operatorname{ch4a}-\operatorname{sina})^3(\operatorname{ch5a}-\operatorname{sina})^4}\cdot\cdot\right) \quad --<S1-15>$$

◆ $\frac{\pi}{4}$ 極限公式 (L(1)極限公式)

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\rightarrow+0} \frac{a}{2}\left(\frac{1}{\operatorname{cha}}+\frac{1}{\operatorname{ch2a}}+\frac{1}{\operatorname{ch3a}}+\frac{1}{\operatorname{ch4a}}+\cdot\cdot\right) \quad ----<S4-1>$$

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\rightarrow+0} a\left(\frac{1}{\operatorname{cha}}+\frac{1}{\operatorname{ch3a}}+\frac{1}{\operatorname{ch5a}}+\frac{1}{\operatorname{ch7a}}+\cdot\cdot\right) \quad ----<S4-2>$$

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\rightarrow+0} a^2\left(\frac{2\operatorname{sh2a}}{\operatorname{ch}^2 2a}+\frac{4\operatorname{sh4a}}{\operatorname{ch}^2 4a}+\frac{6\operatorname{sh6a}}{\operatorname{ch}^2 6a}+\frac{8\operatorname{sh8a}}{\operatorname{ch}^2 8a}+\cdot\cdot\right) \quad ---<S4-3>$$

$$\frac{\pi}{4} = \lim_{a \rightarrow +0} 2a \left(\frac{\text{cha}}{\text{ch}2a + \text{cha}} + \frac{\text{ch}3a}{\text{ch}6a + \text{cha}} + \frac{\text{ch}5a}{\text{ch}10a + \text{cha}} + \frac{\text{ch}7a}{\text{ch}14a + \text{cha}} + \cdot \cdot \right) \quad \text{--<S4-4>}$$

$$\frac{\pi}{4} = \lim_{a \rightarrow +0} 2 \left(\tan^{-1} \left(\frac{\text{sha}}{\text{ch}2a} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{\text{sha}}{\text{ch}6a} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{\text{sha}}{\text{ch}10a} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{\text{sha}}{\text{ch}14a} \right) + \cdot \cdot \right) \quad \text{--<S4-5>}$$

$$\frac{\pi}{4} = \lim_{a \rightarrow +0} \left(\tan^{-1} \left(\frac{1}{\text{sha}} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{1}{\text{sh}3a} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{1}{\text{sh}5a} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{1}{\text{sh}7a} \right) + - \cdot \cdot \right) \quad \text{--<S4-6>}$$

$$\frac{\pi}{4} = \lim_{a \rightarrow +0} 4 \left(\tan^{-1} \left(\frac{\text{sha}}{\text{ch}4a} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{\text{sha}}{\text{ch}12a} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{\text{sha}}{\text{ch}20a} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{\text{sha}}{\text{ch}28a} \right) + \cdot \cdot \right) \quad \text{--<S4-7>}$$

$$\frac{\pi}{4} = \lim_{a \rightarrow +0} 2a \left(\frac{\text{ch}2a}{\text{ch}4a + \text{cha}} + \frac{\text{ch}4a}{\text{ch}8a + \text{cha}} + \frac{\text{ch}6a}{\text{ch}12a + \text{cha}} + \frac{\text{ch}8a}{\text{ch}16a + \text{cha}} + \cdot \cdot \right) \quad \text{----<S4-8>}$$

$$\frac{\pi}{4} = \lim_{a \rightarrow +0} \left(\tan^{-1} \left(\frac{\text{cosa}}{\text{sha}} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{\text{cosa}}{\text{sh}3a} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{\text{cosa}}{\text{sh}5a} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{\text{cosa}}{\text{sh}7a} \right) + - \cdot \cdot \right) \quad \text{--<S4-9>}$$

$$\frac{\pi}{4} = \lim_{a \rightarrow +0} 2 \left(\tan^{-1} \left(\frac{\text{sha}}{\text{ch}4a} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{\text{sha}}{\text{ch}8a} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{\text{sha}}{\text{ch}12a} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{\text{sha}}{\text{ch}16a} \right) + \cdot \cdot \right) \quad \text{--<S4-10>}$$

$$\frac{\pi}{4} = \lim_{a \rightarrow +0} a^2 \left(\frac{\text{sh}2a}{\text{ch}4a + \cos 2a} + \frac{2\text{sh}3a}{\text{ch}6a + \cos 2a} + \frac{3\text{sh}4a}{\text{ch}8a + \cos 2a} + \frac{4\text{sh}5a}{\text{ch}10a + \cos 2a} + \cdot \cdot \right) \quad \text{---<S4-11>}$$

$$\frac{\pi}{4} = \lim_{a \rightarrow +0} a^2 \left(\frac{\text{sh}2a}{\text{ch}4a + 1} + \frac{2\text{sh}3a}{\text{ch}6a + 1} + \frac{3\text{sh}4a}{\text{ch}8a + 1} + \frac{4\text{sh}5a}{\text{ch}10a + 1} + \cdot \cdot \right) \quad \text{---<S4-12>}$$

$$\frac{\pi}{4} = \lim_{a \rightarrow +0} 2 \left(\tan^{-1} \left(\frac{1}{e^a} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{1}{e^{3a}} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{1}{e^{5a}} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{1}{e^{7a}} \right) + - \cdot \cdot \right) \quad \text{--<S4-13>}$$

$$\frac{\pi}{4} = \lim_{a \rightarrow +0} a^2 \left(\frac{\text{sha}}{\text{ch}^2 a} + \frac{3\text{sh}3a}{\text{ch}^2 3a} + \frac{5\text{sh}5a}{\text{ch}^2 5a} + \frac{7\text{sh}7a}{\text{ch}^2 7a} + \cdot \cdot \right) \quad \text{---<S4-14>}$$

$$\frac{\pi}{4} = \lim_{a \rightarrow +0} 2a \left(\frac{\text{sina} \cdot \text{sha}}{\text{ch}2a + \cos 2a} + \frac{3\text{sina} \cdot \text{sh}3a}{\text{ch}6a + \cos 2a} + \frac{5\text{sina} \cdot \text{sh}5a}{\text{ch}10a + \cos 2a} + \frac{7\text{sina} \cdot \text{sh}7a}{\text{ch}14a + \cos 2a} + \cdot \cdot \right) \quad \text{---<S4-15>}$$

$$\frac{\pi}{4} = \lim_{a \rightarrow +0} 2 \left(\text{cosa} \cdot \tan^{-1}(e^{-a}) - \cos 3a \cdot \tan^{-1}(e^{-3a}) + \cos 5a \cdot \tan^{-1}(e^{-5a}) - \cos 7a \cdot \tan^{-1}(e^{-7a}) + - \cdot \cdot \right) \quad \text{--<S4-16>}$$

$$\frac{\pi}{4} = \lim_{a \rightarrow +0} 4 \left(\tan^{-1} \left(\frac{\text{sha}}{\text{ch}8a} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{\text{sha}}{\text{ch}16a} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{\text{sha}}{\text{ch}24a} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{\text{sha}}{\text{ch}32a} \right) + \cdot \cdot \right) \quad \text{--<S4-17>}$$

$$\frac{\pi}{4} = \lim_{a \rightarrow +0} 8 \left(\tan^{-1} \left(\frac{\text{sha}}{\text{ch16a}} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{\text{sha}}{\text{ch32a}} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{\text{sha}}{\text{ch48a}} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{\text{sha}}{\text{ch64a}} \right) + \cdot \cdot \right) \text{ ---<S4-18>}$$

$$\frac{\pi}{4} = \lim_{a \rightarrow +0} 16 \left(\tan^{-1} \left(\frac{\text{sha}}{\text{ch32a}} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{\text{sha}}{\text{ch64a}} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{\text{sha}}{\text{ch96a}} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{\text{sha}}{\text{ch128a}} \right) + \cdot \cdot \right) \text{ ---<S4-19>}$$

$$\frac{\pi}{4} = \lim_{a \rightarrow +0} 4a \left(\frac{\text{ch2a}}{\text{ch4a+cha}} + \frac{\text{ch6a}}{\text{ch12a+cha}} + \frac{\text{ch10a}}{\text{ch20a+cha}} + \frac{\text{ch14a}}{\text{ch28a+cha}} + \cdot \cdot \right) \text{ ---<S4-20>}$$

$$\frac{\pi}{4} = \lim_{a \rightarrow +0} 8a \left(\frac{\text{ch4a}}{\text{ch8a+cha}} + \frac{\text{ch12a}}{\text{ch24a+cha}} + \frac{\text{ch20a}}{\text{ch40a+cha}} + \frac{\text{ch28a}}{\text{ch56a+cha}} + \cdot \cdot \right) \text{ ---<S4-21>}$$

$$\frac{\pi}{4} = \lim_{a \rightarrow +0} 16a \left(\frac{\text{ch8a}}{\text{ch16a+cha}} + \frac{\text{ch24a}}{\text{ch48a+cha}} + \frac{\text{ch40a}}{\text{ch80a+cha}} + \frac{\text{ch56a}}{\text{ch112a+cha}} + \cdot \cdot \right) \text{ ---<S4-22>}$$

-

$$\frac{\pi}{4} = \lim_{a \rightarrow +0} \left(\tan^{-1} \left(\frac{1}{\text{sha}} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{1}{\text{sh2a}} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{1}{\text{sh3a}} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{1}{\text{sh4a}} \right) + - \cdot \cdot \right) \text{ ---<S4-23>}$$

$$\frac{\pi}{4} = \lim_{a \rightarrow +0} 2 \left(\tan^{-1} \left(\frac{1}{e^a} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{1}{e^{2a}} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{1}{e^{3a}} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{1}{e^{4a}} \right) + - \cdot \cdot \right) \text{ ---<S4-24>}$$

$$\frac{\pi}{4} = \lim_{a \rightarrow +0} \left(\tan^{-1} \left(\frac{\text{sha}}{\text{ch2a}} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{\text{sha}}{\text{ch4a}} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{\text{sha}}{\text{ch6a}} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{\text{sha}}{\text{ch8a}} \right) + \cdot \cdot \right) \text{ ---<S4-25>}$$

◆log2 極限公式

$$\log 2 = \lim_{a \rightarrow +0} a \left(\frac{1}{e^a+1} + \frac{1}{e^{2a}+1} + \frac{1}{e^{3a}+1} + \frac{1}{e^{4a}+1} + \cdot \cdot \right) \text{ ----<S5-1>}$$

$$\log 2 = \lim_{a \rightarrow +0} 2a \left(\frac{1}{e^a+1} + \frac{1}{e^{3a}+1} + \frac{1}{e^{5a}+1} + \frac{1}{e^{7a}+1} + \cdot \cdot \right) \text{ ----<S5-2>}$$

$$\log 2 = \lim_{a \rightarrow \pm 0} 2a^2 \left(\frac{1}{\text{ch}^2 a} + \frac{3}{\text{ch}^2 3a} + \frac{5}{\text{ch}^2 5a} + \frac{7}{\text{ch}^2 7a} + \cdot \cdot \right) \text{ ---<S5-3>}$$

$$\log 2 = \lim_{a \rightarrow \pm 0} a^2 \left(\frac{1}{\text{ch}^2 a} + \frac{2}{\text{ch}^2 2a} + \frac{3}{\text{ch}^2 3a} + \frac{4}{\text{ch}^2 4a} + \cdot \cdot \right) \text{ ---<S5-4>}$$

$$\log 2 = \lim_{a \rightarrow +0} 2a \left(\text{sha} \cdot \log \left(\frac{\text{cha}}{\text{sha}} \right) + \text{sh3a} \cdot \log \left(\frac{\text{ch3a}}{\text{sh3a}} \right) + \text{sh5a} \cdot \log \left(\frac{\text{ch5a}}{\text{sh5a}} \right) + \cdot \cdot \right) \text{ ---<S5-5>}$$

$$\log 2 = \lim_{a \rightarrow +0} a \left(\text{sha} \cdot \log \left(\frac{\text{cha}}{\text{sha}} \right) + \text{sh}2a \cdot \log \left(\frac{\text{ch}2a}{\text{sh}2a} \right) + \text{sh}3a \cdot \log \left(\frac{\text{ch}3a}{\text{sh}3a} \right) + \cdot \cdot \right) \quad \text{---<S5-6>}$$

$$\log 2 = \lim_{a \rightarrow +0} 2a \left(\frac{e^{-2a} + \text{cha}}{\text{ch}2a + \text{cha}} + \frac{e^{-6a} + \text{cha}}{\text{ch}6a + \text{cha}} + \frac{e^{-10a} + \text{cha}}{\text{ch}10a + \text{cha}} + \frac{e^{-14a} + \text{cha}}{\text{ch}14a + \text{cha}} + \cdot \cdot \right) \quad \text{---<S5-7>}$$

$$\log 2 = \lim_{a \rightarrow +0} \frac{a}{2} \left(\frac{1}{e^a} \cdot \text{th}^{-1} \left(\frac{1}{\text{cha}} \right) + \frac{1}{e^{2a}} \cdot \text{th}^{-1} \left(\frac{1}{\text{ch}2a} \right) + \frac{1}{e^{3a}} \cdot \text{th}^{-1} \left(\frac{1}{\text{ch}3a} \right) + \frac{1}{e^{4a}} \cdot \text{th}^{-1} \left(\frac{1}{\text{ch}4a} \right) + \cdot \cdot \right) \quad \text{---<S5-8>}$$

$$\log 2 = \lim_{a \rightarrow \pm 0} a^3 \left(\frac{1^2 \text{sha}}{\text{ch}^3 a} + \frac{2^2 \text{sh}2a}{\text{ch}^3 2a} + \frac{3^2 \text{sh}3a}{\text{ch}^3 3a} + \frac{4^2 \text{sh}4a}{\text{ch}^3 4a} + \cdot \cdot \right) \quad \text{---<S5-9>}$$

$$\log 2 = \lim_{a \rightarrow +0} \frac{a}{2} \left(\left(1 - \frac{\text{sha}}{\text{cha}+1} \right) + \left(1 - \frac{\text{sh}2a}{\text{ch}2a+1} \right) + \left(1 - \frac{\text{sh}3a}{\text{ch}3a+1} \right) + \left(1 - \frac{\text{sh}4a}{\text{ch}4a+1} \right) + \cdot \cdot \right) \quad \text{---<S5-10>}$$

$$\log 2 = \lim_{a \rightarrow +0} a \left(\left(1 - \frac{\text{sha}}{\text{cha}+1} \right) + \left(1 - \frac{\text{sh}3a}{\text{ch}3a+1} \right) + \left(1 - \frac{\text{sh}5a}{\text{ch}5a+1} \right) + \left(1 - \frac{\text{sh}7a}{\text{ch}7a+1} \right) + \cdot \cdot \right) \quad \text{---<S5-11>}$$

$$\log 2 = \lim_{a \rightarrow +0} a \cdot \log \left(\frac{1}{(1-e^{-2a})^{e^a} (1-e^{-6a})^{e^{3a}} (1-e^{-10a})^{e^{5a}} (1-e^{-14a})^{e^{7a}} \cdot \cdot} \right) \quad \text{---<S5-12>}$$

◆ζ(3)極限公式

$$\zeta(3) = \lim_{a \rightarrow +0} \frac{16a^2}{7} \log \left(\frac{1}{\text{th}2a \cdot \text{th}^2 3a \cdot \text{th}^3 4a \cdot \text{th}^4 5a \cdot \cdot} \right) \quad \text{---<S6-1>}$$

$$\zeta(3) = \lim_{a \rightarrow \pm 0} \frac{8a^4}{9} \left(\frac{2^3-2}{\text{ch}^2 2a} + \frac{3^3-3}{\text{ch}^2 3a} + \frac{4^3-4}{\text{ch}^2 4a} + \frac{5^3-5}{\text{ch}^2 5a} + \cdot \cdot \right) \quad \text{---<S6-2>}$$

$$\zeta(3) = \lim_{a \rightarrow \pm 0} \frac{2a^4}{3} \left(\frac{2^3-2}{\text{sh}^2 2a} + \frac{3^3-3}{\text{sh}^2 3a} + \frac{4^3-4}{\text{sh}^2 4a} + \frac{5^3-5}{\text{sh}^2 5a} + \cdot \cdot \right) \quad \text{---<S6-3>}$$

$$\zeta(3) = \lim_{a \rightarrow \pm 0} \frac{16a^3}{7} \left(\frac{1^2}{\text{sh}2a} + \frac{2^2}{\text{sh}4a} + \frac{3^2}{\text{sh}6a} + \frac{4^2}{\text{sh}8a} + \cdot \cdot \right) \quad \text{----<S6-4>}$$

$$\zeta(3) = \lim_{a \rightarrow +0} \frac{16a^3}{3} \left(\frac{1^2}{e^{2a}+1} + \frac{2^2}{e^{4a}+1} + \frac{3^2}{e^{6a}+1} + \frac{4^2}{e^{8a}+1} + \cdot \cdot \right) \quad \text{----<S6-5>}$$

$$\zeta(3)=\lim_{a\rightarrow+0}\frac{8a^2}{3}\log\left((1+e^{-a})(1+e^{-3a})^3(1+e^{-5a})^5(1+e^{-7a})^7\cdot\cdot\right) \quad \text{---<S6-6>}$$

$$\zeta(3)=\lim_{a\rightarrow+0}a^2\cdot\log\left(\frac{1}{(1-e^{-a})(1-e^{-2a})^2(1-e^{-3a})^3(1-e^{-4a})^4\cdot\cdot}\right) \quad \text{---<S6-7>}$$

$$\zeta(3)=\lim_{a\rightarrow+0}\frac{16a^2}{3}\log\left((1+e^{-2a})(1+e^{-4a})^2(1+e^{-6a})^3(1+e^{-8a})^4\cdot\cdot\right) \quad \text{---<S6-8>}$$

$$\zeta(3)=\lim_{a\rightarrow+0}2a^2\cdot\log\left(\frac{1}{(1-e^{-a})(1-e^{-3a})^3(1-e^{-5a})^5(1-e^{-7a})^7\cdot\cdot}\right) \quad \text{---<S6-9>}$$

$$\zeta(3)=\lim_{a\rightarrow+0}\frac{4a^3}{3}\left(\frac{1^2}{e^a+1}+\frac{3^2}{e^{3a}+1}+\frac{5^2}{e^{5a}+1}+\frac{7^2}{e^{7a}+1}+\cdot\cdot\right) \quad \text{----<S6-10>}$$

$$\zeta(3)=\lim_{a\rightarrow+0}a^3\left(\frac{1^2}{e^a-1}+\frac{3^2}{e^{3a}-1}+\frac{5^2}{e^{5a}-1}+\frac{7^2}{e^{7a}-1}+\cdot\cdot\right) \quad \text{----<S6-11>}$$

$$\zeta(3)=\lim_{a\rightarrow\pm0}\frac{4a^3}{7}\left(\frac{1^2}{\text{sha}}+\frac{3^2}{\text{sh}3a}+\frac{5^2}{\text{sh}5a}+\frac{7^2}{\text{sh}7a}+\cdot\cdot\right) \quad \text{----<S6-12>}$$

$$\zeta(3)=\lim_{a\rightarrow+0}\frac{16a^2}{7}\left(\text{th}^{-1}(e^{-a})+3\text{th}^{-1}(e^{-3a})+5\text{th}^{-1}(e^{-5a})+7\text{th}^{-1}(e^{-7a})+\cdot\cdot\right) \quad \text{--<S6-13>}$$

$$\zeta(3)=\lim_{a\rightarrow\pm0}\frac{8a^2}{7}\left(\text{th}^{-1}\left(\frac{1}{\text{cha}}\right)+3\text{th}^{-1}\left(\frac{1}{\text{ch}3a}\right)+5\text{th}^{-1}\left(\frac{1}{\text{ch}5a}\right)+7\text{th}^{-1}\left(\frac{1}{\text{ch}7a}\right)+\cdot\cdot\right) \quad \text{--<S6-14>}$$

$$\zeta(3)=\lim_{a\rightarrow\pm0}\frac{4a^4}{3}\left(\frac{3^3-3}{\text{sh}^2 3a}+\frac{5^3-5}{\text{sh}^2 5a}+\frac{7^3-7}{\text{sh}^2 7a}+\frac{9^3-9}{\text{sh}^2 9a}+\cdot\cdot\right) \quad \text{---<S6-15>}$$

$$\zeta(3)=\lim_{a\rightarrow+0}\frac{8a^2}{3}\log(2(1+e^{-2a})^3(1+e^{-4a})^5(1+e^{-6a})^7\cdot\cdot) \quad \text{---<S6-16>}$$

$$\zeta(3)=\lim_{a\rightarrow+0}\frac{8a^2}{3}\log\left((1+e^{-2a})(1+e^{-4a})^3(1+e^{-6a})^5(1+e^{-8a})^7\cdot\cdot\right) \quad \text{---<S6-17>}$$

$$\zeta(3)=\lim_{a\rightarrow+0}\frac{8a^2}{3}\log\left((1+e^a)(1+e^{-a})^3(1+e^{-3a})^5(1+e^{-5a})^7\cdot\cdot\right) \quad \text{---<S6-18>}$$

$$\zeta(3) = \lim_{a \rightarrow +0} \frac{8a^2}{3} \log \left((1 + e^{-3a})(1 + e^{-5a})^3(1 + e^{-7a})^5(1 + e^{-9a})^7 \cdot \cdot \right) \quad \text{---<S6-19>}$$

$$\zeta(3) = \lim_{a \rightarrow +0} \frac{16a^2}{3} \log \left((1 + e^{-a})(1 + e^{-3a})^2(1 + e^{-5a})^3(1 + e^{-7a})^4 \cdot \cdot \right) \quad \text{---<S6-20>}$$

$$\zeta(3) = \lim_{a \rightarrow +0} \frac{16a^2}{3} \log \left((1 + e^{-3a})(1 + e^{-5a})^2(1 + e^{-7a})^3(1 + e^{-9a})^4 \cdot \cdot \right) \quad \text{---<S6-21>}$$

$$\zeta(3) = \lim_{a \rightarrow +0} \frac{16a^2}{3} \log \left(2(1 + e^{-2a})^2(1 + e^{-4a})^3(1 + e^{-6a})^4(1 + e^{-8a})^5 \cdot \cdot \right) \quad \text{---<S6-22>}$$

$$\zeta(3) = \lim_{a \rightarrow +0} \frac{16a^2}{3} \log \left((1 + e^a)(1 + e^{-a})^2(1 + e^{-3a})^3(1 + e^{-5a})^4 \cdot \cdot \right) \quad \text{---<S6-23>}$$

$$\zeta(3) = \lim_{a \rightarrow \pm 0} \frac{8a^4}{9} \left(\frac{1^3}{\text{ch}^2 a} + \frac{2^3}{\text{ch}^2 2a} + \frac{3^3}{\text{ch}^2 3a} + \frac{4^3}{\text{ch}^2 4a} + \cdot \cdot \right) \quad \text{----<S6-24>}$$

$$\zeta(3) = \lim_{a \rightarrow \pm 0} \frac{2a^4}{3} \left(\frac{1^3}{\text{sh}^2 a} + \frac{2^3}{\text{sh}^2 2a} + \frac{3^3}{\text{sh}^2 3a} + \frac{4^3}{\text{sh}^2 4a} + \cdot \cdot \right) \quad \text{----<S6-25>}$$

$$\zeta(3) = \lim_{a \rightarrow +0} \frac{a^3}{2} \left(\frac{1^2}{e^a - 1} + \frac{2^2}{e^{2a} - 1} + \frac{3^2}{e^{3a} - 1} + \frac{4^2}{e^{4a} - 1} + \cdot \cdot \right) \quad \text{----<S6-26>}$$

$$\zeta(3) = \lim_{a \rightarrow \pm 0} \frac{2a^4}{21} \left(\frac{3 \times 2 \times 1 \text{ch} 4a}{\text{sh}^2 4a} + \frac{4 \times 3 \times 2 \text{ch} 5a}{\text{sh}^2 5a} + \frac{5 \times 4 \times 3 \text{ch} 6a}{\text{sh}^2 6a} + \frac{6 \times 5 \times 4 \text{ch} 7a}{\text{sh}^2 7a} + \cdot \cdot \right) \quad \text{----<S6-27>}$$

$$\zeta(3) = \lim_{a \rightarrow +0} a^2 \cdot \log \left(\frac{1}{(1 - e^{-2a})(1 - e^{-3a})^2(1 - e^{-4a})^3(1 - e^{-5a})^4 \cdot \cdot} \right) \quad \text{---<S6-28>}$$

◆ e^π 極限公式

$$e^\pi = \lim_{a \rightarrow +0} \left(\frac{\text{cha} + \sin a}{\text{cha} - \sin a} \right) \left(\frac{\text{ch} 2a + \sin a}{\text{ch} 2a - \sin a} \right) \left(\frac{\text{ch} 3a + \sin a}{\text{ch} 3a - \sin a} \right) \left(\frac{\text{ch} 4a + \sin a}{\text{ch} 4a - \sin a} \right) \cdot \cdot \quad \text{--<S8-1>}$$

$$e^\pi = \lim_{a \rightarrow +0} \left(\frac{\text{cha} + \sin a}{\text{cha} - \sin a} \right)^2 \left(\frac{\text{ch} 3a + \sin a}{\text{ch} 3a - \sin a} \right)^2 \left(\frac{\text{ch} 5a + \sin a}{\text{ch} 5a - \sin a} \right)^2 \left(\frac{\text{ch} 7a + \sin a}{\text{ch} 7a - \sin a} \right)^2 \cdot \cdot \quad \text{--<S8-2>}$$

◆ $\frac{\pi^4}{90}$ 極限公式 ($\zeta(4)$ 極限公式)

$$\frac{\pi^4}{90} = \lim_{a \rightarrow +0} \frac{32a^4}{45} \left(\frac{1 \times 2 \times 3}{\text{sh}3a} + \frac{2 \times 3 \times 5}{\text{sh}5a} + \frac{3 \times 4 \times 7}{\text{sh}7a} + \frac{4 \times 5 \times 9}{\text{sh}9a} + \frac{5 \times 6 \times 11}{\text{sh}11a} + \frac{6 \times 7 \times 13}{\text{sh}13a} + \cdot \cdot \right) \text{ --<S13-1>}$$

$$\frac{\pi^4}{90} = \lim_{a \rightarrow +0} \frac{8a^5}{21} \left(\frac{1^4}{\text{ch}^2 a} + \frac{2^4}{\text{ch}^2 2a} + \frac{3^4}{\text{ch}^2 3a} + \frac{4^4}{\text{ch}^2 4a} + \cdot \cdot \right) \text{ -----<S13-2>}$$

$$\frac{\pi^4}{90} = \lim_{a \rightarrow +0} \frac{a^5}{3} \left(\frac{1^4}{\text{sh}^2 a} + \frac{2^4}{\text{sh}^2 2a} + \frac{3^4}{\text{sh}^2 3a} + \frac{4^4}{\text{sh}^2 4a} + \cdot \cdot \right) \text{ -----<S13-3>}$$

$$\frac{\pi^4}{90} = \lim_{a \rightarrow +0} \frac{a^5}{45} \left(\frac{4 \times 3 \times 2 \times 1 \text{ch}5a}{\text{sh}^2 5a} + \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \text{ch}6a}{\text{sh}^2 6a} + \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \text{ch}7a}{\text{sh}^2 7a} + \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \text{ch}8a}{\text{sh}^2 8a} + \cdot \cdot \right) \text{ --<S13-4>}$$

$$\frac{\pi^4}{90} = \lim_{a \rightarrow +0} \frac{32a^3}{15} \left(2 \times 1 \cdot \log \left(\frac{1}{\text{th}3a} \right) + 3 \times 2 \cdot \log \left(\frac{1}{\text{th}4a} \right) + 4 \times 3 \cdot \log \left(\frac{1}{\text{th}5a} \right) + 5 \times 4 \cdot \log \left(\frac{1}{\text{th}6a} \right) + \cdot \cdot \right) \text{ ----<S13-5>}$$

$$\frac{\pi^4}{90} = \lim_{a \rightarrow +0} \frac{4a^4}{45} \cdot \text{sh} \frac{a}{2} \left(\frac{4 \times 3 \times 2 \times 1 \text{ch}5a}{\text{ch}10a - \text{cha}} + \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \text{ch}6a}{\text{ch}12a - \text{cha}} + \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \text{ch}7a}{\text{ch}14a - \text{cha}} + \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \text{ch}8a}{\text{ch}16a - \text{cha}} + \cdot \cdot \right) \text{ --<S13-6>}$$

◆ζ (5) 極限公式

$$\zeta(5) = \lim_{a \rightarrow +0} \frac{128a^4}{93} \left(3 \times 2 \times 1 \cdot \log \left(\frac{1}{\text{th}4a} \right) + 4 \times 3 \times 2 \cdot \log \left(\frac{1}{\text{th}5a} \right) + 5 \times 4 \times 3 \cdot \log \left(\frac{1}{\text{th}6a} \right) + 6 \times 5 \times 4 \cdot \log \left(\frac{1}{\text{th}7a} \right) + \cdot \cdot \right) \text{ -<S15-1>}$$

◆ $\pi/4 - (1/2) \log 2$ 極限公式

$$\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \log 2 = \lim_{a \rightarrow +0} a \cdot \log \left((1 + e^{-2a})e^a (1 + e^{-6a})e^{3a} (1 + e^{-10a})e^{5a} (1 + e^{-14a})e^{7a} \cdot \cdot \right) \text{ --<S16-1>}$$

=====

上記の八つの青色式が得られた。Wolfram Alpha での数値検証でも式の成立を確認している。
紙幅の関係から証明は略すが、その証明はこれまでに示してきた証明と類似のものとなる。

最後に、気になる点や想うことなど述べておく。

=====

●次の三式を比べよう。

$$L(2) = \lim_{a \rightarrow +0} \frac{a}{4} \log \left(\left(\frac{\text{ch}2a + \sin a}{\text{ch}2a - \sin a} \right) \left(\frac{\text{ch}3a + \sin a}{\text{ch}3a - \sin a} \right)^2 \left(\frac{\text{ch}4a + \sin a}{\text{ch}4a - \sin a} \right)^3 \left(\frac{\text{ch}5a + \sin a}{\text{ch}5a - \sin a} \right)^4 \cdot \cdot \right) \text{ --<S1-15>}$$

$$e^\pi = \lim_{a \rightarrow +0} \left(\frac{\text{cha} + \sin a}{\text{cha} - \sin a} \right) \left(\frac{\text{ch}2a + \sin a}{\text{ch}2a - \sin a} \right) \left(\frac{\text{ch}3a + \sin a}{\text{ch}3a - \sin a} \right) \left(\frac{\text{ch}4a + \sin a}{\text{ch}4a - \sin a} \right) \cdot \cdot \text{ --<S8-1>}$$

$$e^{\pi} = \lim_{a \rightarrow +0} \left(\frac{\text{cha} + \sin a}{\text{cha} - \sin a} \right)^2 \left(\frac{\text{ch3a} + \sin a}{\text{ch3a} - \sin a} \right)^2 \left(\frac{\text{ch5a} + \sin a}{\text{ch5a} - \sin a} \right)^2 \left(\frac{\text{ch7a} + \sin a}{\text{ch7a} - \sin a} \right)^2 \cdot \cdot \cdot \text{---<S8-2>}$$

ふしぎな感覚を覚える。これらの式の右辺の無限積はテータ関数の発展版（親戚 or 親分）ともいうべき関数になっているような気がする。e^πは現代数学では超越数とわかっているの、<S 8-1>と<S 8-2>の右辺も超越数とわかる。<S 1-15>の右辺の無限積は ch2a、ch3a・・となっていて cha から始まっていない点に注意したい。ちょっとひねりが加わった形となっている。現代数学では L(2)は無理数かどうかさえわかっていないが、まあ超越数にちがいない。

●少し前にも述べたが、これら極限公式は、柿の木に例えれば柿の実に当たる。枝があり、幹があり、根っこがあって柿がなる。感覚的に極限公式を出している状態というのは、柿の実を一つ一つとっていつているのと同じである。三角関数と双曲線関数の融合域の三変数域の一つ木は巨大で葉が生い茂っていてわかりにくくなっているが、たくさんの実がなっている。

●次を比べる。

$$\zeta(3) = \lim_{a \rightarrow +0} a^2 \cdot \log \left(\frac{1}{(1-e^{-a})(1-e^{-2a})^2(1-e^{-3a})^3(1-e^{-4a})^4 \cdot \cdot} \right) \text{---<S6-7>}$$

$$\zeta(3) = \lim_{a \rightarrow +0} a^2 \cdot \log \left(\frac{1}{(1-e^{-2a})(1-e^{-3a})^2(1-e^{-4a})^3(1-e^{-5a})^4 \cdot \cdot} \right) \text{---<S6-28>}$$

これも面白い。。

●次も見たい。

$$\log 2 = \lim_{a \rightarrow +0} a \cdot \log \left(\frac{1}{(1-e^{-2a})e^a(1-e^{-6a})e^{3a}(1-e^{-10a})e^{5a}(1-e^{-14a})e^{7a} \cdot \cdot} \right) \text{---<S5-12>}$$

$$\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \log 2 = \lim_{a \rightarrow +0} a \cdot \log \left((1+e^{-2a})e^a(1+e^{-6a})e^{3a}(1+e^{-10a})e^{5a}(1+e^{-14a})e^{7a} \cdot \cdot \right) \text{---<S16-1>}$$

これらの log 内の無限積もすばらしい形をしている。こんな形ははじめてである！この無限積もまたテータ関数の発展版というようなものになっている気がして興味深い。このような式は見ていて飽きない。これらを眺めていると、人類が手にしていないテータの一族というのが多くあってそれらは地下に眠って気がする。

=====

2025. 11. 15 杉岡幹生

sugioka_m@mvb.biglobe.ne.jp

<参考文献>

・「マグロウヒル 数学公式・数表ハンドブック」(Murray R. Spiegel 著、氏家勝巳訳、オーム社)