

＜ 三角関数と双曲線関数の融合域（その４９） ＞

極限公式を新たに三つ見出したので下方に青色式で示す。なお、同公式は多く出すぎたため、今回のものに関係ないグループは略した。関係のあるグループは過去のものすべて示した。

以降において、 $\zeta(3)$ 、 $\zeta(4)$ は次の通り。

$$\zeta(3) = 1 + 1/2^3 + 1/3^3 + 1/4^3 + \dots = \text{非明示}$$

$$\zeta(4) = 1 + 1/2^4 + 1/3^4 + 1/4^4 + \dots = \pi^4/90$$

以降では、双曲線関数 $\sinh$, $\cosh$, $\tanh$ はそれぞれ sh , ch , th と略記した。例えば、 $sh2a$ は $\sinh(2a)$ のことである。 a は任意の実数である。 th^{-1} は $\operatorname{arctanh}$ である。 $\log$ は自然対数、 e は自然対数の底。

なお、 $\lim$ での $a \rightarrow +0$ は a をプラス側から 0 に近づける意味であり、 $a \rightarrow \pm 0$ は a をプラス側、マイナス側どちらから 0 に近づけても OK の意味である。

=====

＜ 極限公式 ＞

◆ $\zeta(3)$ 極限公式

$$\zeta(3) = \lim_{a \rightarrow +0} \frac{16a^2}{7} \log \left(\frac{1}{th2a \cdot th^2 3a \cdot th^3 4a \cdot th^4 5a \dots} \right) \quad \text{---<S6-1>}$$

$$\zeta(3) = \lim_{a \rightarrow \pm 0} \frac{8a^4}{9} \left(\frac{2^3-2}{ch^2 2a} + \frac{3^3-3}{ch^2 3a} + \frac{4^3-4}{ch^2 4a} + \frac{5^3-5}{ch^2 5a} + \dots \right) \quad \text{---<S6-2>}$$

$$\zeta(3) = \lim_{a \rightarrow \pm 0} \frac{2a^4}{3} \left(\frac{2^3-2}{sh^2 2a} + \frac{3^3-3}{sh^2 3a} + \frac{4^3-4}{sh^2 4a} + \frac{5^3-5}{sh^2 5a} + \dots \right) \quad \text{---<S6-3>}$$

$$\zeta(3) = \lim_{a \rightarrow \pm 0} \frac{16a^3}{7} \left(\frac{1^2}{sh2a} + \frac{2^2}{sh4a} + \frac{3^2}{sh6a} + \frac{4^2}{sh8a} + \dots \right) \quad \text{----<S6-4>}$$

$$\zeta(3) = \lim_{a \rightarrow +0} \frac{16a^3}{3} \left(\frac{1^2}{e^{2a}+1} + \frac{2^2}{e^{4a}+1} + \frac{3^2}{e^{6a}+1} + \frac{4^2}{e^{8a}+1} + \dots \right) \quad \text{----<S6-5>}$$

$$\zeta(3) = \lim_{a \rightarrow +0} \frac{8a^2}{3} \log \left((1 + e^{-a})(1 + e^{-3a})^3(1 + e^{-5a})^5(1 + e^{-7a})^7 \dots \right) \quad \text{---<S6-6>}$$

$$\zeta(3) = \lim_{a \rightarrow +0} 4a^2 \cdot \log \left(\frac{1}{(1-e^{-2a})(1-e^{-4a})^2(1-e^{-6a})^3(1-e^{-8a})^4 \dots} \right) \quad \text{---<S6-7>}$$

$$\zeta(3)=\lim_{a\rightarrow+0}\frac{16a^2}{3}\log\left((1+e^{-2a})(1+e^{-4a})^2(1+e^{-6a})^3(1+e^{-8a})^4\cdot\cdot\right) \quad \text{---<S6-8>}$$

$$\zeta(3)=\lim_{a\rightarrow+0}2a^2\cdot\log\left(\frac{1}{(1-e^{-a})(1-e^{-3a})^3(1-e^{-5a})^5(1-e^{-7a})^7\cdot\cdot}\right) \quad \text{---<S6-9>}$$

$$\zeta(3)=\lim_{a\rightarrow+0}\frac{4a^3}{3}\left(\frac{1^2}{e^a+1}+\frac{3^2}{e^{3a}+1}+\frac{5^2}{e^{5a}+1}+\frac{7^2}{e^{7a}+1}+\cdot\cdot\right) \quad \text{----<S6-10>}$$

$$\zeta(3)=\lim_{a\rightarrow+0}a^3\left(\frac{1^2}{e^a-1}+\frac{3^2}{e^{3a}-1}+\frac{5^2}{e^{5a}-1}+\frac{7^2}{e^{7a}-1}+\cdot\cdot\right) \quad \text{----<S6-11>}$$

$$\zeta(3)=\lim_{a\rightarrow\pm0}\frac{4a^3}{7}\left(\frac{1^2}{\text{sha}}+\frac{3^2}{\text{sh}3a}+\frac{5^2}{\text{sh}5a}+\frac{7^2}{\text{sh}7a}+\cdot\cdot\right) \quad \text{----<S6-12>}$$

$$\zeta(3)=\lim_{a\rightarrow+0}\frac{16a^2}{7}\left(\text{th}^{-1}(e^{-a})+3\text{th}^{-1}(e^{-3a})+5\text{th}^{-1}(e^{-5a})+7\text{th}^{-1}(e^{-7a})+\cdot\cdot\right) \quad \text{--<S6-13>}$$

$$\zeta(3)=\lim_{a\rightarrow\pm0}\frac{8a^2}{7}\left(\text{th}^{-1}\left(\frac{1}{\text{cha}}\right)+3\text{th}^{-1}\left(\frac{1}{\text{ch}3a}\right)+5\text{th}^{-1}\left(\frac{1}{\text{ch}5a}\right)+7\text{th}^{-1}\left(\frac{1}{\text{ch}7a}\right)+\cdot\cdot\right) \quad \text{--<S6-14>}$$

$$\zeta(3)=\lim_{a\rightarrow\pm0}\frac{4a^4}{3}\left(\frac{3^3-3}{\text{sh}^2 3a}+\frac{5^3-5}{\text{sh}^2 5a}+\frac{7^3-7}{\text{sh}^2 7a}+\frac{9^3-9}{\text{sh}^2 9a}+\cdot\cdot\right) \quad \text{---<S6-15>}$$

$$\zeta(3)=\lim_{a\rightarrow+0}\frac{8a^2}{3}\log(2(1+e^{-2a})^3(1+e^{-4a})^5(1+e^{-6a})^7\cdot\cdot) \quad \text{---<S6-16>}$$

$$\zeta(3)=\lim_{a\rightarrow+0}\frac{8a^2}{3}\log\left((1+e^{-2a})(1+e^{-4a})^3(1+e^{-6a})^5(1+e^{-8a})^7\cdot\cdot\right) \quad \text{---<S6-17>}$$

$$\zeta(3)=\lim_{a\rightarrow+0}\frac{8a^2}{3}\log\left((1+e^a)(1+e^{-a})^3(1+e^{-3a})^5(1+e^{-5a})^7\cdot\cdot\right) \quad \text{---<S6-18>}$$

$$\zeta(3)=\lim_{a\rightarrow+0}\frac{8a^2}{3}\log\left((1+e^{-3a})(1+e^{-5a})^3(1+e^{-7a})^5(1+e^{-9a})^7\cdot\cdot\right) \quad \text{---<S6-19>}$$

$$\zeta(3)=\lim_{a\rightarrow+0}\frac{16a^2}{3}\log\left((1+e^{-a})(1+e^{-3a})^2(1+e^{-5a})^3(1+e^{-7a})^4\cdot\cdot\right) \quad \text{---<S6-20>}$$

$$\zeta(3)=\lim_{a\rightarrow+0}\frac{16a^2}{3}\log\left((1+e^{-3a})(1+e^{-5a})^2(1+e^{-7a})^3(1+e^{-9a})^4\cdot\cdot\right) \quad \text{---<S6-21>}$$

$$\zeta(3)=\lim_{a\rightarrow+0}\frac{16a^2}{3}\log(2(1+e^{-2a})^2(1+e^{-4a})^3(1+e^{-6a})^4(1+e^{-8a})^5\cdot\cdot) \quad \text{---<S6-22>}$$

$$\zeta(3)=\lim_{a\rightarrow+0}\frac{16a^2}{3}\log\left((1+e^a)(1+e^{-a})^2(1+e^{-3a})^3(1+e^{-5a})^4\cdot\cdot\right) \quad \text{---<S6-23>}$$

$$\zeta(3)=\lim_{a\rightarrow\pm0}\frac{8a^4}{9}\left(\frac{1^3}{\text{ch}^2a}+\frac{2^3}{\text{ch}^22a}+\frac{3^3}{\text{ch}^23a}+\frac{4^3}{\text{ch}^24a}+\cdot\cdot\right) \quad \text{----<S6-24>}$$

◆ $\frac{\pi^4}{90}$ 極限公式 (ζ(4)極限公式)

$$\frac{\pi^4}{90}=\lim_{a\rightarrow+0}\frac{32a^4}{45}\left(\frac{1\times2\times3}{\text{sh}3a}+\frac{2\times3\times5}{\text{sh}5a}+\frac{3\times4\times7}{\text{sh}7a}+\frac{4\times5\times9}{\text{sh}9a}+\frac{5\times6\times11}{\text{sh}11a}+\frac{6\times7\times13}{\text{sh}13a}+\cdot\cdot\right) \quad \text{--<S13-1>}$$

$$\frac{\pi^4}{90}=\lim_{a\rightarrow+0}\frac{8a^5}{21}\left(\frac{1^4}{\text{ch}^2a}+\frac{2^4}{\text{ch}^22a}+\frac{3^4}{\text{ch}^23a}+\frac{4^4}{\text{ch}^24a}+\cdot\cdot\right) \quad \text{-----<S13-2>}$$

$$\frac{\pi^4}{90}=\lim_{a\rightarrow+0}\frac{a^5}{3}\left(\frac{1^4}{\text{sh}^2a}+\frac{2^4}{\text{sh}^22a}+\frac{3^4}{\text{sh}^23a}+\frac{4^4}{\text{sh}^24a}+\cdot\cdot\right) \quad \text{-----<S13-3>}$$

=====

上記の三つの青色式が得られた。Wolfram Alpha での数値検証でも式の成立を確認している。
いずれの式もきれいな形をしている。

さて、ここで<S 1 3-3>の証明の概要を以下に示す。

=====

<S13-3>の証明

次の②の式から出発する。これは2年半前に[こちら](#)で出した恒等式である。

$$4\left(\frac{1^4}{\text{sh}^2a}+\frac{2^4}{\text{sh}^22a}+\frac{3^4}{\text{sh}^23a}+\frac{4^4}{\text{sh}^24a}+\cdot\cdot\right) \\ =\frac{\text{sh}2a(\text{ch}2a+5)}{\text{sh}^6a}+\frac{2\text{sh}4a(\text{ch}4a+5)}{\text{sh}^62a}+\frac{3\text{sh}6a(\text{ch}6a+5)}{\text{sh}^63a}+\frac{4\text{sh}8a(\text{ch}8a+5)}{\text{sh}^64a}+\cdot\cdot \quad \text{----②}$$

(a > 0)

両辺に a^5 を掛けると(右辺は項ごとに掛けていく)、次となる。

$$4a^5\left(\frac{1^4}{\text{sh}^2a}+\frac{2^4}{\text{sh}^22a}+\frac{3^4}{\text{sh}^23a}+\frac{4^4}{\text{sh}^24a}+\cdot\cdot\right) \\ =\frac{a^5\cdot\text{sh}2a(\text{ch}2a+5)}{\text{sh}^6a}+\frac{a^5\cdot2\text{sh}4a(\text{ch}4a+5)}{\text{sh}^62a}+\frac{a^5\cdot3\text{sh}6a(\text{ch}6a+5)}{\text{sh}^63a}+\frac{a^5\cdot4\text{sh}8a(\text{ch}8a+5)}{\text{sh}^64a}+\cdot\cdot$$

次に a をプラス側から 0 に近づけていく。

右辺はロピタルの定理を何度も使って計算すると、 $12(1+1/2^4+1/3^4+1/4^4+\dots)$ つまり 12 と (4) すなわち $12 \cdot \pi^4/90$ となる。よって整理して目的の <S 13-3> に到達した。

$$\frac{\pi^4}{90} = \lim_{a \rightarrow +0} \frac{a^5}{3} \left(\frac{1^4}{\text{sh}^2 a} + \frac{2^4}{\text{sh}^2 2a} + \frac{3^4}{\text{sh}^2 3a} + \frac{4^4}{\text{sh}^2 4a} + \dots \right) \quad \text{-----<S13-3>}$$

終わり。

=====

このようにして <S 13-3> が得られた。略した証明で申し訳ないが、大きな流れはこのようになる。他式も類似的な方法で得られる。

最後に、気になる点や想うことなど述べておく。

=====

●証明は上記の通りであるが、ポイントは⑩の恒等式の導出である。

$$4 \left(\frac{1^4}{\text{sh}^2 a} + \frac{2^4}{\text{sh}^2 2a} + \frac{3^4}{\text{sh}^2 3a} + \frac{4^4}{\text{sh}^2 4a} + \dots \right) \\ = \frac{\text{sh} 2a (\text{ch} 2a + 5)}{\text{sh}^6 a} + \frac{2 \text{sh} 4a (\text{ch} 4a + 5)}{\text{sh}^6 2a} + \frac{3 \text{sh} 6a (\text{ch} 6a + 5)}{\text{sh}^6 3a} + \frac{4 \text{sh} 8a (\text{ch} 8a + 5)}{\text{sh}^6 4a} + \dots \quad \text{-----⑩}$$

ゼータの香りの漂う面白い式である。2年半前、これからさらになにかが出るとは思っていなかったのですが、今回ここから <S 13-3> が飛び出てきたということになった。当時はこの両辺に わざわざ a^5 を掛ける という発想を思いつかなかったのだが、もっと簡単な恒等式でまずそのような方法を思いつき、だんだんとこのような地下にある式にも適用できると気づいてきた次第である。最初は地表にころがっているきらきら輝く鉱石ばかり拾っていき、そして次に、土に埋もれ地表にちょっと頭を出している式を掘り出していつているという構図といえる。

なお、証明中、ロピタルの定理を使う場面は、今回のケースはまともにやると計算がたいへんになるので、Wolfram Alpha をつかって右辺の各項をテイラー展開してやるという工夫を加えた。その方法を使うと計算が楽になる。

●ここ3年で私は⑩のような恒等式を大量に得ていて、そこから極限公式が出るかどうかを見直している状況である。極限公式が出てくる恒等式の数少なく、全体の 1/4 ほどの割合である。恒等式から極限公式が出ることはすぐにわからない場合も結構あって、これでいけそうだ！とトライしては失敗をくり返すということをやっている。

●数学は失敗が多い。実験をやっては失敗をくり返している。表に出すのはうまくいったものばかりであるから、なにやら整然と公式が出来ているかのような印象を持たれるかもしれないが、実際は失敗の連続である。

私にとって数学とは実験そのものである。それは科学や日常の実験となんら変わらない。実験はたのしいものだが、それは組み合わせを探したのしさといえる。レゴブロックのように使える素材の個数は決まっているので（三角関数と双曲線関数の融合域の場合は、[こちら](#)のフーリエ級数と深フーリエ級数）、発見へといたる

過程というのはさまざまな組み合わせパターンを探す作業と同じである。たまにとんでもなくよい組み合わせがみつかり、そんなとき感激がある（数学は具体に触るから面白いのであって抽象などあとの話でよい）。つまり発見や創造はレゴブロックで遊ぶことと同じなので、失敗と切り離すことはできない。

●今回の式を眺めよう。

$$\zeta(3) = \lim_{a \rightarrow \pm 0} \frac{8a^4}{9} \left(\frac{1^3}{\text{ch}^2 a} + \frac{2^3}{\text{ch}^2 2a} + \frac{3^3}{\text{ch}^2 3a} + \frac{4^3}{\text{ch}^2 4a} + \cdots \right) \quad \text{----<S6-24>}$$

$$\frac{\pi^4}{90} = \lim_{a \rightarrow +0} \frac{8a^5}{21} \left(\frac{1^4}{\text{ch}^2 a} + \frac{2^4}{\text{ch}^2 2a} + \frac{3^4}{\text{ch}^2 3a} + \frac{4^4}{\text{ch}^2 4a} + \cdots \right) \quad \text{-----<S13-2>}$$

$$\frac{\pi^4}{90} = \lim_{a \rightarrow +0} \frac{a^5}{3} \left(\frac{1^4}{\text{sh}^2 a} + \frac{2^4}{\text{sh}^2 2a} + \frac{3^4}{\text{sh}^2 3a} + \frac{4^4}{\text{sh}^2 4a} + \cdots \right) \quad \text{-----<S13-3>}$$

毎度のことながら、きれいである。右辺で a を 0 に近づけると左辺値に収束するというのが直感ではわからない。自明を恐れ、右辺各項をテイラー展開してみても自明とは思えないものになる。証明はできてもふしぎさが残る。

Wolfram Alpha での数値検証での値のうごきを観察していて、これら極限公式というのは超関数というものに関係しているのではないかとふと思った。しかし超関数自体に関心がないのでまったくわからないし、勘違いにすぎないかもしれない。

●次の二式を比べたい。

$$\zeta(3) = \lim_{a \rightarrow \pm 0} \frac{8a^4}{9} \left(\frac{2^3-2}{\text{ch}^2 2a} + \frac{3^3-3}{\text{ch}^2 3a} + \frac{4^3-4}{\text{ch}^2 4a} + \frac{5^3-5}{\text{ch}^2 5a} + \cdots \right) \quad \text{---<S6-2>}$$

$$\zeta(3) = \lim_{a \rightarrow \pm 0} \frac{8a^4}{9} \left(\frac{1^3}{\text{ch}^2 a} + \frac{2^3}{\text{ch}^2 2a} + \frac{3^3}{\text{ch}^2 3a} + \frac{4^3}{\text{ch}^2 4a} + \cdots \right) \quad \text{-----<S6-24>}$$

なにやら頭がくらくらしてくる。

=====

2025. 10. 4 杉岡幹生

sugioka_m@mvp.biglobe.ne.jp

<参考文献>

- ・「マグロウヒル 数学公式・数表ハンドブック」(Murray R. Spiegel 著、氏家勝巳訳、オーム社)
- ・「数学公式Ⅱ」(森口・宇田川・一松、岩波書店)