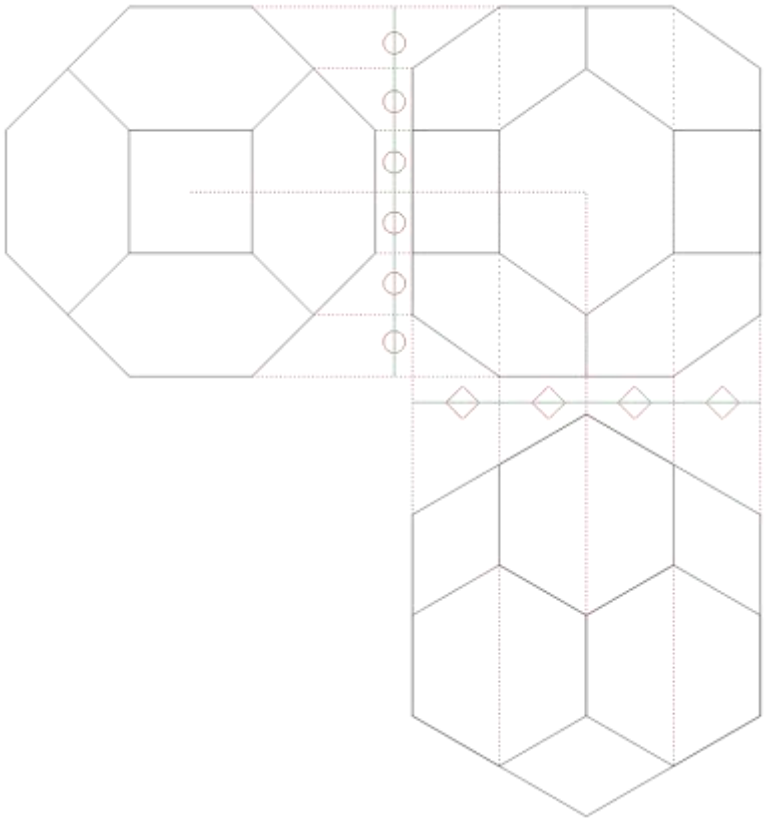
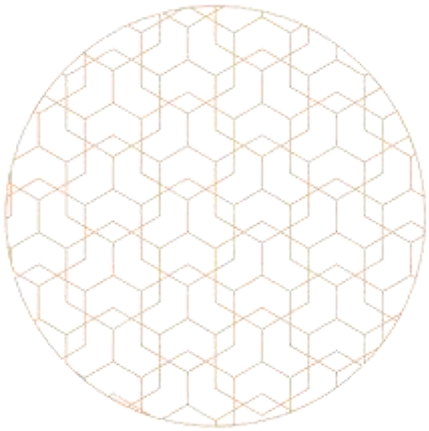
切頂八面体３２個接合による切稜立方体について（２）

積み木インテリアギャラリー
山﨑憲久

切頂八面体３２個を籠形に接合してできる切稜立方体の六角形面が、正六角形ではないにもかかわらず実に均整のとれた形をしているのでさらに調べてみた。

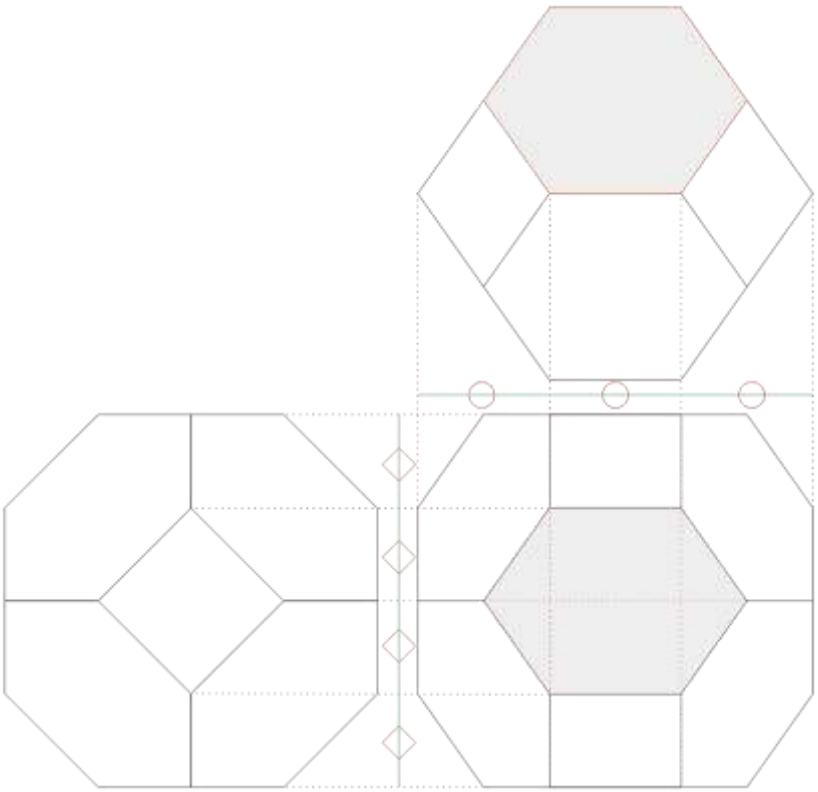


六角形面が３枚集まる頂点を中心に投影した図における３つの六角形面は、外形の正六角形に対する辺長比１/２の正六角形となっている。したがって正方形面は、投影図においては正三角形２つを合わせた菱形である。このような投影面をもつことが美しさの秘密だった。



そこでふと思い出したのが、左図の文様だ。この文様は、「麻の葉くずし」という名で新形小紋帳に紹介されている葛飾北斎の創作文様である。この紋様のモチーフは、先の投影図よりも菱形がわずかに小さい外形正六角形の図形であることがおわかりいただけよう。

さて、切稜立方体の六角形のある投影図形が正六角形であるということは、切頂八面体の正六角形にあたるということでもある。であるならば逆も成り立つのかと思って調べてみた。



上の図は、切稜立方体の六角形面間距離が切頂八面体の正方形面間距離と一致するように比較したものだ。すると図に書き入れたような整数比が見て取れ、上に置いた切頂八面体の辺心図における六角形と下の切稜立方体の六角形がぴったり一致することが分かった。

これまでに分かったことをまとめると次のようになる。

１，切稜立方体２４個を籠形に接合すると切頂八面体となる。逆に、切頂八面体を３２個籠形に接合すると切稜立方体となる。その切稜立方体の正方形の一辺は切稜前の立方体の一辺の３分の１である。

２．上記の辺長比３分の１の切稜立方体の六角形面は、六角形面が３枚集まる頂点を中心とする投影図において、正六角形となる。つまり切頂八面体の正六角形面と相似である。逆に、切頂八面体の正六角形面は、正六角形面２枚が集まる辺を中心とする投影図において、辺長比３分の１の切稜立方体の六角形面と相似の六角形となる。

この２点から、両者が特別な対応関係にあることは間違いないとえよう。

ついでに、体積も調べてみた。

切稜立方体の計量 [編集]

切稜する前の立方体の一辺の長さを２、切稜後の正方形面の一辺の長さをd とすると、

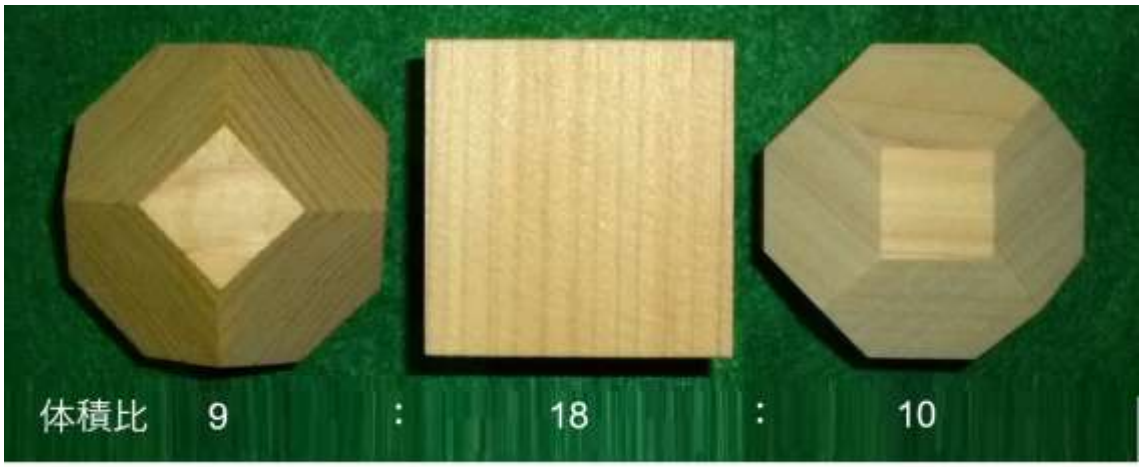
d	
2	立方体
$2(\sqrt{2}-1)$	内接球を持つ切稜立方体
$\frac{2}{3}$	切頂八面体３２個からなる切稜立方体
$\frac{2(4\sqrt{3}-3)}{13}$	等稜切稜立方体
$\frac{2}{5}$	外接球を持つ切稜立方体
0	菱形十二面体

切稜立方体の中心から六角形面の中心までの距離H=$\frac{\sqrt{2}(d+2)}{4}$

体積V=$\frac{-3d^3}{4}+\frac{3d^2}{2}+3d+2$

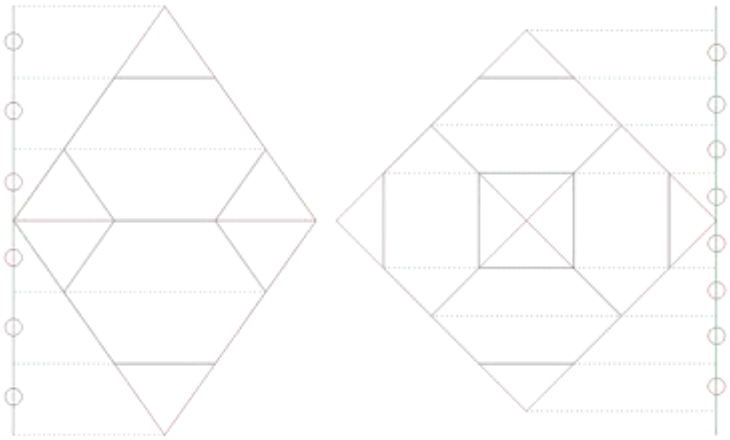
上掲の Wikipedia をもとに計算してみると、

辺長比３分の１の切稜立方体 d= $\frac{2}{3}$ のとき体積は $\frac{40}{9}$ となった。切稜前の立方体との体積比は、$\frac{5}{9}$ とこちらもシンプルになった。切頂八面体そのものの体積は、切頂前の立方体の $\frac{1}{2}$ であるから、３者の関係は次のようになる。



上記の切稜立方体のバリエーションのなかで、切稜前の立方体との体積比において、辺長比３分の１の切稜立方体はもっともシンプルな値を示す。また、ある投影図においては正六角形の面を見せる。これらの点を踏まえれば、今回見つかった切稜立方体こそ、代表的な切稜立方体と言っていいのだろうと思う。つまり、修飾語なしの「切稜立方体」と呼ぶことにしたい。
言葉の対応関係においても、切頂八面体と切稜立方体とは、それぞれの前半が、切頂⇄切稜の対関係をなし、後半が正八面体⇄立方体の双対関係をなす。

ここで、切頂八面体を立方体との関係でのみ見てきたことに気づいたので、正八面体との関係でも見ておこう。ということは、切稜立方体のほうは菱形１２面体との関係で見ることになる。



切頂八面体は、正八面体の頂点周りを辺の３分の１点を結ぶ面で切り取る。
かたや、辺長比３分の１の切稜立方体は、菱形１２面体の４価の頂点まわりを辺の中点を結ぶ面で切り取ることになる。

切頂八面体の元の正八面体との体積比は、$\frac{8}{9}$

辺長比３分の１の切稜立方体の元の菱形１２面体との体積比は、$\frac{15}{16}$

となった。これらは立方体との関係ほどではないものの、シンプルな値を示していると言えよう。

はじめて切稜立方体を作ってから２５年、ようやくにして代表的な切稜立方体にたどり着くことができた。なんとも蝸牛の歩みである。