

＜ 三角関数と双曲線関数の融合域（その４８）＞

極限公式を新たに四つ見出したので下方に青色式で示す。

なお、同公式は多く出すぎたため、今回のものに関係ないグループは略した。関係のあるグループは過去のものすべて示した。

以降において、 $L(-1)$ 、 $L(1)$ 、 $L(2)$ 、 $\phi(0)$ は次の通り。

$$L(-1) = "1 -3 +5 -7 +- \cdot \cdot" = 0$$

$$L(1) = 1 -1/3 +1/5 -1/7 +- \cdot \cdot = \pi/4$$

$$L(2) = 1 -1/3^2 +1/5^2 -1/7^2 +- \cdot \cdot = \text{非明示（カタランの定数）}$$

$$\phi(0) = "1 -1 +1 -1 +- \cdot \cdot" = 1/2$$

注意：ここで $\phi(s)$ は $\phi(s) = 1 -2^{-s} +3^{-s} -4^{-s} +5^{-s} -6^{-s} +- \cdot \cdot = (1-2^{1-s}) \zeta(s)$ である。よって例えば $s=-1$ のとき、 $\phi(-1) = "1 -2 +3 -4 +- \cdot \cdot" = (1-2^2) \zeta(-1) = 1/4$ となる。 $\zeta(-1) = -1/12$ を用いた。

以降では、双曲線関数 $\sinh$, $\cosh$, $\tanh$ はそれぞれ sh , ch , th と略記した。例えば、 $sh2a$ は $\sinh(2a)$ のことである。 a は任意の実数である。 $\tan^{-1}$, th^{-1} はそれぞれ $\arctan$, $\operatorname{arctanh}$ である。 $\log$ は自然対数、 e は自然対数の底。 $\sin$, $\cos$, $\tan$ は通常の表記である。

なお、 $\lim$ での $a \rightarrow +0$ は a をプラス側から 0 に近づける意味であり、 $a \rightarrow \pm 0$ は a をプラス側, マイナス側 どちらから 0 に近づけても OK の意味である。

=====

< 極限公式 >

◆ $L(2)$ 極限公式

$$L(2) = \lim_{a \rightarrow \pm 0} a \left(\tan^{-1} \left(\frac{1}{sha} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{1}{sh3a} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{1}{sh5a} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{1}{sh7a} \right) + \cdot \cdot \right) \quad \text{---<S1>}$$

$$L(2) = \lim_{a \rightarrow \pm 0} a^2 \left(\frac{2}{ch2a} + \frac{4}{ch4a} + \frac{6}{ch6a} + \frac{8}{ch8a} + \cdot \cdot \right) \quad \text{----<S1-2>}$$

$$L(2) = \lim_{a \rightarrow \pm 0} a^2 \left(\frac{1}{cha} + \frac{3}{ch3a} + \frac{5}{ch5a} + \frac{7}{ch7a} + \cdot \cdot \right) \quad \text{----<S1-3>}$$

$$L(2) = \lim_{a \rightarrow \pm 0} a \left(\tan^{-1} \left(\frac{cha}{sha} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{cha}{sh3a} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{cha}{sh5a} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{cha}{sh7a} \right) + \cdot \cdot \right) \quad \text{--<S1-4>}$$

$$L(2)=\lim_{a\rightarrow\pm 0}2a\left(\tan^{-1}\left(\frac{\text{cha}}{\text{sh}2a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\text{cha}}{\text{sh}6a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\text{cha}}{\text{sh}10a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\text{cha}}{\text{sh}14a}\right)+\cdot\cdot\cdot\right) \quad --<\text{S1-5}>$$

$$L(2)=\lim_{a\rightarrow\pm 0}a\left(\tan^{-1}\left(\frac{\text{cosa}}{\text{sha}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\text{cosa}}{\text{sh}3a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\text{cosa}}{\text{sh}5a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\text{cosa}}{\text{sh}7a}\right)+\cdot\cdot\cdot\right) \quad --<\text{S1-6}>$$

$$L(2)=\lim_{a\rightarrow\pm 0}a\left(\tan^{-1}\left(\frac{\text{sha}}{\text{cha}}\right)+3\tan^{-1}\left(\frac{\text{sha}}{\text{ch}3a}\right)+5\tan^{-1}\left(\frac{\text{sha}}{\text{ch}5a}\right)+7\tan^{-1}\left(\frac{\text{sha}}{\text{ch}7a}\right)+\cdot\cdot\cdot\right) \quad --<\text{S1-7}>$$

$$L(2)=\lim_{a\rightarrow\pm 0}a\left(\text{th}^{-1}\left(\frac{\text{sina}}{\text{cha}}\right)+3\text{th}^{-1}\left(\frac{\text{sina}}{\text{ch}3a}\right)+5\text{th}^{-1}\left(\frac{\text{sina}}{\text{ch}5a}\right)+7\text{th}^{-1}\left(\frac{\text{sina}}{\text{ch}7a}\right)+\cdot\cdot\cdot\right) \quad --<\text{S1-8}>$$

$$L(2)=\lim_{a\rightarrow\pm 0}2a\left(\tan^{-1}\left(\frac{\text{cha}}{\text{sh}4a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\text{cha}}{\text{sh}8a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\text{cha}}{\text{sh}12a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\text{cha}}{\text{sh}16a}\right)+\cdot\cdot\cdot\right) \quad --<\text{S1-9}>$$

$$L(2)=\lim_{a\rightarrow\pm 0}2a^2\left(\frac{1}{\text{ch}3a}+\frac{2}{\text{ch}5a}+\frac{3}{\text{ch}7a}+\frac{4}{\text{ch}9a}+\frac{5}{\text{ch}11a}+\frac{6}{\text{ch}13a}+\cdot\cdot\cdot\right) \quad ----<\text{S1-10}>$$

$$L(2)=\lim_{a\rightarrow\pm 0}\frac{a}{2}\left(\tan^{-1}\left(\frac{1}{\text{sha}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{\text{sh}2a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{\text{sh}3a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{\text{sh}4a}\right)+\cdot\cdot\cdot\right) \quad --<\text{S1-11}>$$

◆ $\frac{\pi}{4}$ 極限公式 (L(1)極限公式)

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\rightarrow+0}\frac{a}{2}\left(\frac{1}{\text{cha}}+\frac{1}{\text{ch}2a}+\frac{1}{\text{ch}3a}+\frac{1}{\text{ch}4a}+\cdot\cdot\cdot\right) \quad ----<\text{S4-1}>$$

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\rightarrow+0}a\left(\frac{1}{\text{cha}}+\frac{1}{\text{ch}3a}+\frac{1}{\text{ch}5a}+\frac{1}{\text{ch}7a}+\cdot\cdot\cdot\right) \quad ----<\text{S4-2}>$$

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\rightarrow+0}a^2\left(\frac{2\text{sh}2a}{\text{ch}^22a}+\frac{4\text{sh}4a}{\text{ch}^24a}+\frac{6\text{sh}6a}{\text{ch}^26a}+\frac{8\text{sh}8a}{\text{ch}^28a}+\cdot\cdot\cdot\right) \quad ---<\text{S4-3}>$$

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\rightarrow+0}2a\left(\frac{\text{cha}}{\text{ch}2a+\text{cha}}+\frac{\text{ch}3a}{\text{ch}6a+\text{cha}}+\frac{\text{ch}5a}{\text{ch}10a+\text{cha}}+\frac{\text{ch}7a}{\text{ch}14a+\text{cha}}+\cdot\cdot\cdot\right) \quad --<\text{S4-4}>$$

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\rightarrow+0}2\left(\tan^{-1}\left(\frac{\text{sha}}{\text{ch}2a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\text{sha}}{\text{ch}6a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\text{sha}}{\text{ch}10a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\text{sha}}{\text{ch}14a}\right)+\cdot\cdot\cdot\right) \quad --<\text{S4-5}>$$

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\rightarrow+0}\left(\tan^{-1}\left(\frac{1}{\text{sha}}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{1}{\text{sh}3a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{\text{sh}5a}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{1}{\text{sh}7a}\right)+-\cdot\cdot\cdot\right) \quad --<\text{S4-6}>$$

$$\frac{\pi}{4} = \lim_{a \rightarrow +0} 4 \left(\tan^{-1} \left(\frac{\text{sha}}{\text{ch}4a} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{\text{sha}}{\text{ch}12a} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{\text{sha}}{\text{ch}20a} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{\text{sha}}{\text{ch}28a} \right) + \cdot \cdot \right) \quad \text{--<S4-7>}$$

$$\frac{\pi}{4} = \lim_{a \rightarrow +0} 2a \left(\frac{\text{ch}2a}{\text{ch}4a + \text{cha}} + \frac{\text{ch}4a}{\text{ch}8a + \text{cha}} + \frac{\text{ch}6a}{\text{ch}12a + \text{cha}} + \frac{\text{ch}8a}{\text{ch}16a + \text{cha}} + \cdot \cdot \right) \quad \text{----<S4-8>}$$

$$\frac{\pi}{4} = \lim_{a \rightarrow +0} \left(\tan^{-1} \left(\frac{\text{cosa}}{\text{sha}} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{\text{cosa}}{\text{sh}3a} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{\text{cosa}}{\text{sh}5a} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{\text{cosa}}{\text{sh}7a} \right) + - \cdot \cdot \right) \quad \text{--<S4-9>}$$

$$\frac{\pi}{4} = \lim_{a \rightarrow +0} 2 \left(\tan^{-1} \left(\frac{\text{sha}}{\text{ch}4a} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{\text{sha}}{\text{ch}8a} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{\text{sha}}{\text{ch}12a} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{\text{sha}}{\text{ch}16a} \right) + \cdot \cdot \right) \quad \text{--<S4-10>}$$

$$\frac{\pi}{4} = \lim_{a \rightarrow +0} a^2 \left(\frac{\text{sh}2a}{\text{ch}4a + \cos 2a} + \frac{2\text{sh}3a}{\text{ch}6a + \cos 2a} + \frac{3\text{sh}4a}{\text{ch}8a + \cos 2a} + \frac{4\text{sh}5a}{\text{ch}10a + \cos 2a} + \cdot \cdot \right) \quad \text{---<S4-11>}$$

$$\frac{\pi}{4} = \lim_{a \rightarrow +0} a^2 \left(\frac{\text{sh}2a}{\text{ch}4a + 1} + \frac{2\text{sh}3a}{\text{ch}6a + 1} + \frac{3\text{sh}4a}{\text{ch}8a + 1} + \frac{4\text{sh}5a}{\text{ch}10a + 1} + \cdot \cdot \right) \quad \text{---<S4-12>}$$

$$\frac{\pi}{4} = \lim_{a \rightarrow +0} 2 \left(\tan^{-1}(e^{-a}) - \tan^{-1}(e^{-3a}) + \tan^{-1}(e^{-5a}) - \tan^{-1}(e^{-7a}) + - \cdot \cdot \right) \quad \text{--<S4-13>}$$

$$\frac{\pi}{4} = \lim_{a \rightarrow +0} a^2 \left(\frac{\text{sha}}{\text{ch}^2 a} + \frac{3\text{sh}3a}{\text{ch}^2 3a} + \frac{5\text{sh}5a}{\text{ch}^2 5a} + \frac{7\text{sh}7a}{\text{ch}^2 7a} + \cdot \cdot \right) \quad \text{---<S4-14>}$$

$$\frac{\pi}{4} = \lim_{a \rightarrow +0} 2a \left(\frac{\text{sina} \cdot \text{sha}}{\text{ch}2a + \cos 2a} + \frac{3\text{sina} \cdot \text{sh}3a}{\text{ch}6a + \cos 2a} + \frac{5\text{sina} \cdot \text{sh}5a}{\text{ch}10a + \cos 2a} + \frac{7\text{sina} \cdot \text{sh}7a}{\text{ch}14a + \cos 2a} + \cdot \cdot \right) \quad \text{---<S4-15>}$$

$$\frac{\pi}{4} = \lim_{a \rightarrow +0} 2 \left(\text{cosa} \cdot \tan^{-1}(e^{-a}) - \cos 3a \cdot \tan^{-1}(e^{-3a}) + \cos 5a \cdot \tan^{-1}(e^{-5a}) - \cos 7a \cdot \tan^{-1}(e^{-7a}) + - \cdot \cdot \right) \quad \text{--<S4-16>}$$

$$\frac{\pi}{4} = \lim_{a \rightarrow +0} 4 \left(\tan^{-1} \left(\frac{\text{sha}}{\text{ch}8a} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{\text{sha}}{\text{ch}16a} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{\text{sha}}{\text{ch}24a} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{\text{sha}}{\text{ch}32a} \right) + \cdot \cdot \right) \quad \text{--<S4-17>}$$

$$\frac{\pi}{4} = \lim_{a \rightarrow +0} 8 \left(\tan^{-1} \left(\frac{\text{sha}}{\text{ch}16a} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{\text{sha}}{\text{ch}32a} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{\text{sha}}{\text{ch}48a} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{\text{sha}}{\text{ch}64a} \right) + \cdot \cdot \right) \quad \text{--<S4-18>}$$

$$\frac{\pi}{4} = \lim_{a \rightarrow +0} 16 \left(\tan^{-1} \left(\frac{\text{sha}}{\text{ch}32a} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{\text{sha}}{\text{ch}64a} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{\text{sha}}{\text{ch}96a} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{\text{sha}}{\text{ch}128a} \right) + \cdot \cdot \right) \quad \text{--<S4-19>}$$

$$\frac{\pi}{4} = \lim_{a \rightarrow +0} 4a \left(\frac{\text{ch}2a}{\text{ch}4a + \text{cha}} + \frac{\text{ch}6a}{\text{ch}12a + \text{cha}} + \frac{\text{ch}10a}{\text{ch}20a + \text{cha}} + \frac{\text{ch}14a}{\text{ch}28a + \text{cha}} + \cdot \cdot \right) \quad \text{---<S4-20>}$$

$$\frac{\pi}{4} = \lim_{a \rightarrow +0} 8a \left(\frac{\text{ch}4a}{\text{ch}8a+\text{cha}} + \frac{\text{ch}12a}{\text{ch}24a+\text{cha}} + \frac{\text{ch}20a}{\text{ch}40a+\text{cha}} + \frac{\text{ch}28a}{\text{ch}56a+\text{cha}} + \cdot \cdot \right) \quad \text{---<S4-21>}$$

$$\frac{\pi}{4} = \lim_{a \rightarrow +0} 16a \left(\frac{\text{ch}8a}{\text{ch}16a+\text{cha}} + \frac{\text{ch}24a}{\text{ch}48a+\text{cha}} + \frac{\text{ch}40a}{\text{ch}80a+\text{cha}} + \frac{\text{ch}56a}{\text{ch}112a+\text{cha}} + \cdot \cdot \right) \quad \text{---<S4-22>}$$

$$\frac{\pi}{4} = \lim_{a \rightarrow +0} \left(\tan^{-1} \left(\frac{1}{\text{sha}} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{1}{\text{sh}2a} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{1}{\text{sh}3a} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{1}{\text{sh}4a} \right) + - \cdot \cdot \right) \quad \text{---<S4-23>}$$

◆ $\phi(0)=1/2$ 極限公式

$$1/2 = \lim_{a \rightarrow +0} a \left(\frac{1}{\text{ch}^2a} + \frac{1}{\text{ch}^23a} + \frac{1}{\text{ch}^25a} + \frac{1}{\text{ch}^27a} + \cdot \cdot \right) \quad \text{----<T1-2>}$$

$$1/2 = \lim_{a \rightarrow +0} \frac{a}{2} \left(\frac{1}{\text{ch}^2a} + \frac{1}{\text{ch}^22a} + \frac{1}{\text{ch}^23a} + \frac{1}{\text{ch}^24a} + \cdot \cdot \right) \quad \text{----<T1-3>}$$

$$1/2 = \lim_{a \rightarrow \pm 0} 2 \left(\frac{1}{\text{cha}} - \frac{2}{\text{ch}2a} + \frac{3}{\text{ch}3a} - \frac{4}{\text{ch}4a} + - \cdot \cdot \right) \quad \text{----<T1-4>}$$

◆ $L(-1)=0$ 極限公式

$$0 = \lim_{a \rightarrow \pm 0} \frac{1}{a} \left(\frac{1}{\text{cha}} - \frac{3}{\text{ch}3a} + \frac{5}{\text{ch}5a} - \frac{7}{\text{ch}7a} + - \cdot \cdot \right) \quad \text{----<U2-1>}$$

=====

上記の四つの青色式が得られた。Wolfram Alpha での数値検証でも式の成立を確認している。

$L(-1)=0$ という自明な零点の極限公式が得られたのは、はじめてである。

得られた四式を並べよう。

$$L(2) = \lim_{a \rightarrow \pm 0} \frac{a}{2} \left(\tan^{-1} \left(\frac{1}{\text{sha}} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{1}{\text{sh}2a} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{1}{\text{sh}3a} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{1}{\text{sh}4a} \right) + \cdot \cdot \right) \quad \text{--<S1-11>}$$

$$\frac{\pi}{4} = \lim_{a \rightarrow +0} \left(\tan^{-1} \left(\frac{1}{\text{sha}} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{1}{\text{sh}2a} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{1}{\text{sh}3a} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{1}{\text{sh}4a} \right) + - \cdot \cdot \right) \quad \text{---<S4-23>}$$

$$1/2 = \lim_{a \rightarrow \pm 0} 2 \left(\frac{1}{\text{cha}} - \frac{2}{\text{ch}2a} + \frac{3}{\text{ch}3a} - \frac{4}{\text{ch}4a} + - \cdot \cdot \right) \quad \text{----<T1-4>}$$

$$0 = \lim_{a \rightarrow \pm 0} \frac{1}{a} \left(\frac{1}{\text{cha}} - \frac{3}{\text{ch}3a} + \frac{5}{\text{ch}5a} - \frac{7}{\text{ch}7a} + - \cdot \cdot \right) \quad \text{----<U2-1>}$$

どの式もシンプルですばらしい。L(2)式や $\pi/4$ 式は（上方で示したように）これまで大量の極限公式を得てきたが、まだこんなに簡明なものがあつたとは驚きである。

さて、ここで<S 4 - 2 3>の証明を以下に示す。

=====

<S4-23>の証明

次式からスタートする。この交代級数の変形を行っていく。

$$\frac{1}{2} \left(\tan^{-1} \left(\frac{1}{\text{sha}} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{1}{\text{sh}2a} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{1}{\text{sh}3a} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{1}{\text{sh}4a} \right) + - \cdot \cdot \right)$$

<[ゼータの香りの・・・\(その381\)](#)>の深フーリエ級数の[5]でxに $\pi/2$ を代入した結果を、上記の各項に適用し、ひたすら級数を縦に足し算する形で変形していく（13年前の[こちらの](#)2012/8/16の[導出]と同種の方法）。その結果、次となる。

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\tan^{-1} \left(\frac{1}{\text{sha}} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{1}{\text{sh}2a} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{1}{\text{sh}3a} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{1}{\text{sh}4a} \right) + - \cdot \cdot \right) \\ = \frac{1}{e^a + 1} - \frac{1}{3(e^{3a} + 1)} + \frac{1}{5(e^{5a} + 1)} - \frac{1}{7(e^{7a} + 1)} + - \cdot \cdot \end{aligned}$$

(a > 0)

ここで（aは正の実数なので）aを+側から0に近づけていくと、右辺は $1/2(1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + - \cdot \cdot)$ となり、これは(1/2)($\pi/4$)であるから、よって整理して目的の<S 4 - 2 3>に到達した。

$$\frac{\pi}{4} = \lim_{a \rightarrow +0} \left(\tan^{-1} \left(\frac{1}{\text{sha}} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{1}{\text{sh}2a} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{1}{\text{sh}3a} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{1}{\text{sh}4a} \right) + - \cdot \cdot \right) \quad \text{---<S4-23>}$$

終わり。

=====

このようにして<S 4 - 2 3>が得られた。他式も類似の方法で得られる。

最後に、気になる点や想うことなど述べておく。

=====

●<S 4 - 2 3>の証明は上記の通りであるが、ポイントは次の恒等式にある。

$$\frac{1}{2} \left(\tan^{-1} \left(\frac{1}{\text{sha}} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{1}{\text{sh}2a} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{1}{\text{sh}3a} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{1}{\text{sh}4a} \right) + - \cdot \cdot \right)$$

$$= \frac{1}{e^a+1} - \frac{1}{3(e^{3a}+1)} + \frac{1}{5(e^{5a}+1)} - \frac{1}{7(e^{7a}+1)} + - \cdot \cdot$$

これが求まれば＜S 4－2 3＞まではすぐである。じつは上式は2年近く前にノートに出していた。しかしそのときはここから極限公式へと続く道に気づかなかった。その頃は上式のような面白い恒等式が出たことで満足していたのである。極限公式に意識が向き始めるのはもっと後のことである。

人間がなにかを見る(観る)場合、意識して見ないと、目の前に金塊があっても気づかない。これはいつも本当によく感じることである。私たちは見ているようでじつは何も見していない。

私にとって数学を進めるとは、目の前を覆っている偏見(固定観念)というベールをはがしていく作業に他ならない。

● $\pi/4$ 極限公式から次の二式を眺めよう。

$$\frac{\pi}{4} = \lim_{a \rightarrow +0} \left(\tan^{-1} \left(\frac{1}{\text{sha}} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{1}{\text{sh}3a} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{1}{\text{sh}5a} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{1}{\text{sh}7a} \right) + - \cdot \cdot \right) \quad \text{--<S4-6>}$$

$$\frac{\pi}{4} = \lim_{a \rightarrow +0} \left(\tan^{-1} \left(\frac{1}{\text{sha}} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{1}{\text{sh}2a} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{1}{\text{sh}3a} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{1}{\text{sh}4a} \right) + - \cdot \cdot \right) \quad \text{---<S4-23>}$$

眺めているだけでふしぎを感じる。aは0とはできないが、0に+側から近づいていくと $\pi/4$ に収束する。

=====

2025. 9. 27 杉岡幹生

sugioka_m@mvp.biglobe.ne.jp

<参考文献>

- ・「マグローヒル 数学公式・数表ハンドブック」(Murray R. Spiegel 著、氏家勝巳訳、オーム社)
- ・「数学の夢 素数からのひろがり」(黒川信重著、岩波書店)