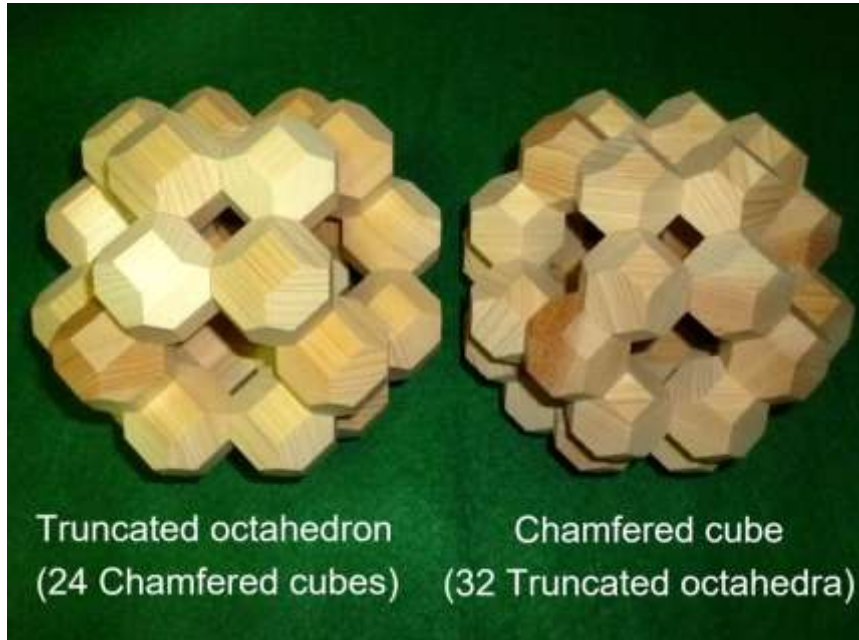


切頂八面体 3 2 個接合による切稜立方体について

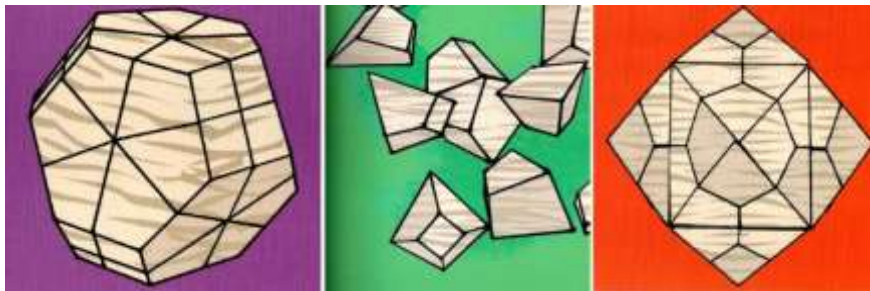
積み木インテリアギャラリー
山崎憲久



2025 年は私が木工を始めてから 25 周年にあたる。

当時全く無自覚に作った切稜立方体を積み上げて最初にできたのが写真左の籠形オブジェだった。のちに多面体の種類を調べていくうちに、この形は切頂八面体だとわかったが、それまでの間は 1 つずつの形と同じ形の拡大版だと思い込んでいた。

切稜立方体の積み木から切頂八面体ができるという事実は、佐藤郁郎先生と出会ってからは、一方では切頂系の多面体を切稜立方体を経由して作成する木工技法として発展した。また他方では切稜立方体の六角形面が菱形 12 面体の一部だという認識から、切頂八面体と菱形 12 面体との共通単位 6 面体の発見、



「数学ワンダーランドへの 1 日冒険旅行」（2010 年刊、秋山仁ほか）より

さらにはそれを半裁したペンタドロンの「平行多面体元素定理」へと発展した。



好評売り切れにつき、再発売されたペンタドロンのプラ模型
(イメージミッション木鏡社 HP より)

こうして、長い間置き去りにしてきたのが、切稜立方体から切頂八面体ができるという事実だった。切稜立方体から切頂八面体ができるということは、切頂八面体からは切稜立方体ができるのか？と思いついたのがつい最近のこと。きっかけは今年の日本鉱物科学会年会に展示された「位相幾何学的相転移モデル」

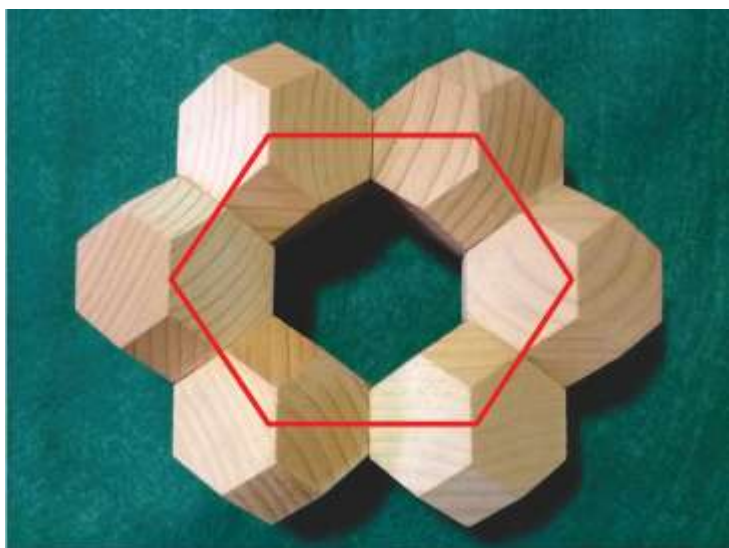


について東京大学の小松一生先生から「どういう意味ですか？」と質問されたことだった。その場は結晶格子の面心立方格子のボロノイ図形が菱形12面体で、体心立方格子のボロノイ図形が切頂八面体で、その両方を1種類の6面体で構成できるという模型です。と説明したのだが、2種類のボロノイ図形の共通単位の説明ではあっても、相転移の説明にはなっていないように思われた。そうはいつでも、相転移の物理化学的メカニズムを理解しているわけでもない私の頭に浮かんだ

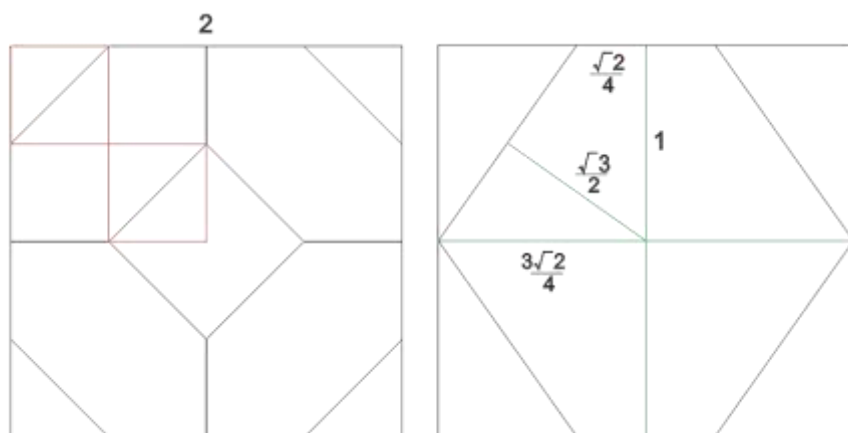
のは、相転移の双方向というイメージであり、そこで思い出したのが、四半世紀前に切稜立方体から切頂八面体ができたという記憶だった。ひょっとすると逆に切頂八面体からは切稜立方体ができるかも、という流れだった。なぜ思いつかなかったのだろうと考えてみても、思い当たることはない、ただ思いつかなかったということだ。

ともあれ切頂八面体32個を使って初めの写真の右側の切稜立方体が予想通り出来上がった。

しかし、その切稜立方体は、普段私が作り慣れている外形正八面体の内接球を持つ切稜立方体ではなかった。そこでどのような切稜立方体ができたのかを調べてみた。

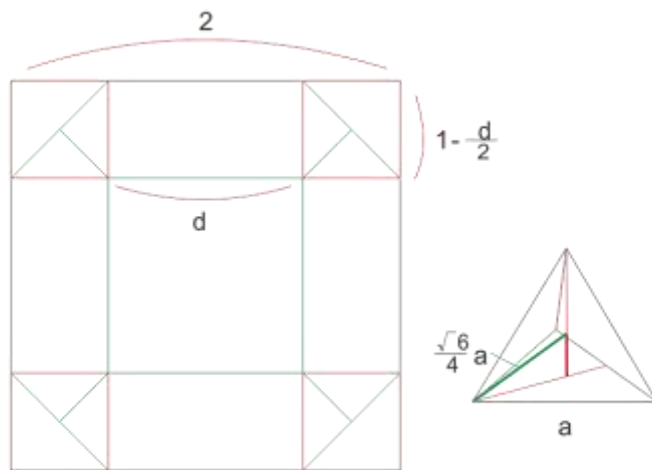


切頂八面体接合による切稜立方体の12枚ある六角形面は、上の図に示したものだ。長辺は切頂八面体の正方面間距離、短辺は切頂八面体の六角形面間距離となっている。



つまり、長辺：短辺＝ $2 : \sqrt{3} \dots \textcircled{1}$

他方、一辺2の立方体から切り出される切稜立方体の六角形面の辺長は、長辺を d とするとき、



短辺は、 $1 - d/2$ を一辺とする正方形の対角線、これを一辺とする正四面体の頂点から重心までの長さにあたるので、

$$\text{長辺} : \text{短辺} = d : \frac{\sqrt{6}}{4} \sqrt{2} \left(1 - \frac{d}{2}\right) \quad \dots \textcircled{2}$$

①と②より、

$$d = \frac{2}{3}$$

となった。

