

< [四重積-二重積]対称式周辺にて >

----- [四重積自乗四和]公式の発見 -----

3年前に私は有限項から成るある恒等式を見出し[ゼータの香り・・\(その251\)](#)他で報告した。それは16式もある恒等式で[四重積-二重積]対称式と名付けたが、その中の～対称式 I という4式のみを再掲すると、下記のものとなる。

今回、その対称式 I を用いて新たな恒等式を四つ見出し“[四重積自乗四和]公式”と名付けたので報告する。それらを下方に青色式で示した。

以降では、双曲線関数 $\sinh$, $\cosh$ はそれぞれ sh, ch と略記した。例えば、shy は $\sinh(y)$ のことであり、ch2x は $\cosh(2x)$ のことである。

=====

[四重積-二重積]対称式 I

対称式 I (1)

$$\sin x \cdot \operatorname{sh} x \cdot \cos y \cdot \operatorname{ch} y - \cos x \cdot \operatorname{ch} x \cdot \sin y \cdot \operatorname{sh} y = \{\sin(x+y) \cdot \operatorname{sh}(x-y) + \operatorname{sh}(x+y) \cdot \sin(x-y)\} / 2$$

対称式 I (2)

$$\cos x \cdot \operatorname{sh} x \cdot \sin y \cdot \operatorname{ch} y - \sin x \cdot \operatorname{ch} x \cdot \cos y \cdot \operatorname{sh} y = \{\sin(x+y) \cdot \operatorname{sh}(x-y) - \operatorname{sh}(x+y) \cdot \sin(x-y)\} / 2$$

対称式 I (3)

$$\sin x \cdot \operatorname{ch} x \cdot \cos y \cdot \operatorname{sh} y + \cos x \cdot \operatorname{sh} x \cdot \sin y \cdot \operatorname{ch} y = \{\sin(x+y) \cdot \operatorname{sh}(x+y) - \operatorname{sh}(x-y) \cdot \sin(x-y)\} / 2$$

対称式 I (4)

$$\sin x \cdot \operatorname{sh} x \cdot \cos y \cdot \operatorname{ch} y + \cos x \cdot \operatorname{ch} x \cdot \sin y \cdot \operatorname{sh} y = \{\sin(x+y) \cdot \operatorname{sh}(x+y) + \operatorname{sh}(x-y) \cdot \sin(x-y)\} / 2$$

ここで、x, y は任意の実数である。

=====

=====

[四重積自乗四和]公式

式 1-(1)

$$\begin{aligned} & (\sin x \cdot \operatorname{sh} x \cdot \cos y \cdot \operatorname{ch} y)^2 - (\cos x \cdot \operatorname{ch} x \cdot \sin y \cdot \operatorname{sh} y)^2 + (\cos x \cdot \operatorname{sh} x \cdot \sin y \cdot \operatorname{ch} y)^2 - (\sin x \cdot \operatorname{ch} x \cdot \cos y \cdot \operatorname{sh} y)^2 \\ & = (\operatorname{ch} 2x - \operatorname{ch} 2y)(\sin^2 x \cdot \cos^2 y + \cos^2 x \cdot \sin^2 y) / 2 \end{aligned}$$

式 1-(2)

$$\begin{aligned} & (\operatorname{sh} x \cdot \sin x \cdot \operatorname{ch} y \cdot \cos y)^2 - (\operatorname{ch} x \cdot \cos x \cdot \operatorname{sh} y \cdot \sin y)^2 + (\operatorname{ch} x \cdot \sin x \cdot \operatorname{sh} y \cdot \cos y)^2 - (\operatorname{sh} x \cdot \cos x \cdot \operatorname{ch} y \cdot \sin y)^2 \\ & = (\cos 2y - \cos 2x)(\operatorname{sh}^2 x \cdot \operatorname{ch}^2 y + \operatorname{ch}^2 x \cdot \operatorname{sh}^2 y) / 2 \end{aligned}$$

式 1-(3)

$$\begin{aligned} & (\text{sh}x \cdot \sin x \cdot \cos y \cdot \text{ch}y)^2 - (\text{ch}x \cdot \cos x \cdot \sin y \cdot \text{sh}y)^2 - (\text{ch}x \cdot \sin x \cdot \sin y \cdot \text{ch}y)^2 + (\text{sh}x \cdot \cos x \cdot \cos y \cdot \text{sh}y)^2 \\ &= (\cos 2x - \text{ch} 2y)(\text{ch}^2 x \cdot \sin^2 y - \text{sh}^2 x \cdot \cos^2 y)/2 \end{aligned}$$

式 1-(4)

$$\begin{aligned} & (\sin x \cdot \text{sh}x \cdot \text{ch}y \cdot \cos y)^2 - (\cos x \cdot \text{ch}x \cdot \text{sh}y \cdot \sin y)^2 - (\cos x \cdot \text{sh}x \cdot \text{sh}y \cdot \cos y)^2 + (\sin x \cdot \text{ch}x \cdot \text{ch}y \cdot \sin y)^2 \\ &= (\text{ch} 2x - \cos 2y)(\sin^2 x \cdot \text{ch}^2 y - \cos^2 x \cdot \text{sh}^2 y)/2 \end{aligned}$$

ここで、 x, y は任意の実数である。

=====

これらの青色式の四式が得られた。対称的な秩序が出ていてきれいである。Wolfram Alpha を使った数値検証でも合っていることを確認している。

さて、これらの導出であるが、次のように行った。[四重積-二重積]対称式 I の四式に着目し、

$$I(1) \times I(4) + I(2) \times I(3)$$

を辺々計算していく。すると右辺では多くの項が相殺されすっきりしてまず次の式 1-(1) が得られる。

式 1-(1)

$$\begin{aligned} & (\sin x \cdot \text{sh}x \cdot \cos y \cdot \text{ch}y)^2 - (\cos x \cdot \text{ch}x \cdot \sin y \cdot \text{sh}y)^2 + (\cos x \cdot \text{sh}x \cdot \sin y \cdot \text{ch}y)^2 - (\sin x \cdot \text{ch}x \cdot \cos y \cdot \text{sh}y)^2 \\ &= (\text{ch} 2x - \text{ch} 2y)(\sin^2 x \cdot \cos^2 y + \cos^2 x \cdot \sin^2 y)/2 \end{aligned}$$

左辺の四重積の自乗の四和がシンプルな右辺の形になったことから、私はこの式を[四重積自乗四和]公式と名付けた。

この式 1-(1) が求まれば、残りの三式はすぐに出る。

それらを出す前に、まず公式集にもある三角関数と双曲線関数における以下の関係式を確認しておこう。

$$\sin(ix) = i \cdot \sinh(x) \quad \text{---①}$$

$$\sinh(ix) = i \cdot \sin(x) \quad \text{---②}$$

$$\cos(ix) = \cosh(x) \quad \text{---③}$$

$$\cosh(ix) = \cos(x) \quad \text{---④}$$

これは重要な公式である。

楕円関数における虚数乗法は、変数を虚数倍すると虚数倍されたほぼ同じ関数が得られるという“よい性質”を指しているはずである。上記①～④は楕円関数のそれではないが、その虚数乗法に近いものとひそかに思っていて、私は勝手に①～④を“三角関数と双曲線関数における虚数乗法”と呼んでいる。

・虚数乗法⇒ガウスと算術幾何平均（その42）

式 1-(1) を再掲する。

式 1-(1)

$$\begin{aligned} & (\sin x \cdot \operatorname{sh} x \cdot \cos y \cdot \operatorname{ch} y)^2 - (\cos x \cdot \operatorname{ch} x \cdot \sin y \cdot \operatorname{sh} y)^2 + (\cos x \cdot \operatorname{sh} x \cdot \sin y \cdot \operatorname{ch} y)^2 - (\sin x \cdot \operatorname{ch} x \cdot \cos y \cdot \operatorname{sh} y)^2 \\ &= (\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{ch}^2 y)(\sin^2 x \cdot \cos^2 y + \cos^2 x \cdot \sin^2 y)/2 \end{aligned}$$

この式 1-(1) に対し、形式的に x に $i \cdot x$ を代入し、y に $i \cdot y$ を代入する (i : 虚数単位)。そして上記関係式 ①～④を適用すると即座に次の式 1-(2) が得られる。見やすいように、左辺については代入した状態を（並べ替えもなにも行わず）そのまま示した。

式 1-(2)

$$\begin{aligned} & (\operatorname{sh} x \cdot \sin x \cdot \operatorname{ch} y \cdot \cos y)^2 - (\operatorname{ch} x \cdot \cos x \cdot \operatorname{sh} y \cdot \sin y)^2 + (\operatorname{ch} x \cdot \sin x \cdot \operatorname{sh} y \cdot \cos y)^2 - (\operatorname{sh} x \cdot \cos x \cdot \operatorname{ch} y \cdot \sin y)^2 \\ &= (\cos^2 y - \cos^2 x)(\operatorname{sh}^2 x \cdot \operatorname{ch}^2 y + \operatorname{ch}^2 x \cdot \operatorname{sh}^2 y)/2 \end{aligned}$$

式 1-(1) を再び掲げる。

式 1-(1)

$$\begin{aligned} & (\sin x \cdot \operatorname{sh} x \cdot \cos y \cdot \operatorname{ch} y)^2 - (\cos x \cdot \operatorname{ch} x \cdot \sin y \cdot \operatorname{sh} y)^2 + (\cos x \cdot \operatorname{sh} x \cdot \sin y \cdot \operatorname{ch} y)^2 - (\sin x \cdot \operatorname{ch} x \cdot \cos y \cdot \operatorname{sh} y)^2 \\ &= (\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{ch}^2 y)(\sin^2 x \cdot \cos^2 y + \cos^2 x \cdot \sin^2 y)/2 \end{aligned}$$

この式 1-(1) に対し、形式的に x に $i \cdot x$ を代入し、y はそのままとする (i : 虚数単位)。そして関係式 ①～④を適用すると即座に次の式 1-(3) が得られる。

式 1-(3)

$$\begin{aligned} & (\operatorname{sh} x \cdot \sin x \cdot \cos y \cdot \operatorname{ch} y)^2 - (\operatorname{ch} x \cdot \cos x \cdot \sin y \cdot \operatorname{sh} y)^2 - (\operatorname{ch} x \cdot \sin x \cdot \sin y \cdot \operatorname{ch} y)^2 + (\operatorname{sh} x \cdot \cos x \cdot \cos y \cdot \operatorname{sh} y)^2 \\ &= (\cos^2 x - \operatorname{ch}^2 y)(\operatorname{ch}^2 x \cdot \sin^2 y - \operatorname{sh}^2 x \cdot \cos^2 y)/2 \end{aligned}$$

もう一度、式 1-(1) を掲げる。

式 1-(1)

$$\begin{aligned} & (\sin x \cdot \operatorname{sh} x \cdot \cos y \cdot \operatorname{ch} y)^2 - (\cos x \cdot \operatorname{ch} x \cdot \sin y \cdot \operatorname{sh} y)^2 + (\cos x \cdot \operatorname{sh} x \cdot \sin y \cdot \operatorname{ch} y)^2 - (\sin x \cdot \operatorname{ch} x \cdot \cos y \cdot \operatorname{sh} y)^2 \\ &= (\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{ch}^2 y)(\sin^2 x \cdot \cos^2 y + \cos^2 x \cdot \sin^2 y)/2 \end{aligned}$$

この式 1-(1) に対し、x はそのまま、形式的に y に $i \cdot y$ を代入する (i : 虚数単位)。そして関係式 ①～④を適用すると即座に次の式 1-(4) が得られる。

式 1-(4)

$$\begin{aligned} & (\sin x \cdot \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} y \cdot \cos y)^2 - (\cos x \cdot \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{sh} y \cdot \sin y)^2 - (\cos x \cdot \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{sh} y \cdot \cos y)^2 + (\sin x \cdot \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{ch} y \cdot \sin y)^2 \\ &= (\operatorname{ch}^2 x - \cos^2 y)(\sin^2 x \cdot \operatorname{ch}^2 y - \cos^2 x \cdot \operatorname{sh}^2 y)/2 \end{aligned}$$

以上。

このようにして式 1-(1) ～式 1-(4) が得られた。

式 1-(1) が得られたら、あとは関係式 ①～④を用いることで簡単に式 1-(2) ～式 1-(4) が出ることになる。

最後に、気になる点や想うことなど述べておく。

=====

●ここ3年ほどずっと三角関数と双曲線関数の融合域を探求しつづけている。

なぜこの領域を探索することになったかといえば、例えば“ $1/(1^4+a^2)+1/(3^4+a^2)+1/(5^4+a^2)+\dots$ ”のようなゼータの香りの漂う公式（以下、ゼータ香り式）を調べていて、一例として次のような母等式を見出してきたが、右辺で三角関数と双曲線関数が仲良く並ぶ姿を頻繁に目にしていて、それでその重要性を悟ったからである。

ゼータ香り式分割母等式Ⅱ（分母4乗型）

$$\begin{aligned} & \sin x/(1^4+4a^4) - \sin 3x/(3^4+4a^4) + \sin 5x/(5^4+4a^4) - \sin 7x/(7^4+4a^4) + \dots \\ & = (\pi/(2a)^3) \{ (C1+S1) \cos(ax) \operatorname{sh}(ax) - (C1-S1) \sin(ax) \operatorname{ch}(ax) \} / \{ \cos(a\pi) + \operatorname{ch}(a\pi) \} \\ & \quad (-\pi/2 \leq x \leq \pi/2) \end{aligned}$$

ここで、 $C1 = \cos(a\pi/2) \operatorname{ch}(a\pi/2)$ 、 $S1 = \sin(a\pi/2) \operatorname{sh}(a\pi/2)$ 、 a は任意の実数（0の場合 $a \rightarrow 0$ ）。

そしてそのゼータ香り式の洞窟は驚くほど奥に続いていた。もう行き止まりか！と思っても延々とまだ先があり複雑に枝分かれしていてそれは果てしなく、いまだ全容などつかめていない。そこはゼータ域よりはるかに広大であった。

数学者はゼータの香りの漂う公式などおまけ程度にしか扱っていないが、それはとんでもないことで、私にいわせれば、ゼータ香り式こそ最重要であり、ゼータがおまけという感じである。

●関係式①～④を再度掲げる。

$$\sin(ix) = i \cdot \sinh(x) \quad \text{---①}$$

$$\sinh(ix) = i \cdot \sin(x) \quad \text{---②}$$

$$\cos(ix) = \cosh(x) \quad \text{---③}$$

$$\cosh(ix) = \cos(x) \quad \text{---④}$$

これは公式集にあるのだが、私は本当によくこの関係式を使う。そして自身で勝手に“三角関数と双曲線関数における虚数乗法”と呼んでいることは先に述べた通りである。これらはとんでもなく重要な式たちである。これのおかげでどれほど多くの公式を見出せたことか！

楕円関数における虚数乗法の重大性を故・高木貞治氏は「近世数学史談」（高木貞治著、共立出版）の中で述べている（p.136）。

『・・・このような持ち寄り楕円函数論を合名的に組織するのでは、アーベルの寄与が不当に過大であるようだ。ヤコービの θ 函数、ガウスの modular function と併せて三幅対を作ろうならば、アーベルの虚数乗法が最も適当であろうと我々は思う、クラインが好むにもせよ、好まぬにもせよ、虚数乗法が大物であることは歴史が明らかに示している。虚数乗法はレムニスケートの場合にガウスが既にやっているが、・・・』

このように虚数乗法の重要性を高木氏は語っている。関係式①～④が極めて重要であることは私自身十分に認識しつくしてきたので、氏のいうことは、いる洞窟（領域）はちがえどよくわかる。

●今回の四式を再びながめよう。

[四重積自乗四和]公式

式 1-(1)

$$\begin{aligned} & (\sin x \cdot \operatorname{sh} x \cdot \cos y \cdot \operatorname{ch} y)^2 - (\cos x \cdot \operatorname{ch} x \cdot \sin y \cdot \operatorname{sh} y)^2 + (\cos x \cdot \operatorname{sh} x \cdot \sin y \cdot \operatorname{ch} y)^2 - (\sin x \cdot \operatorname{ch} x \cdot \cos y \cdot \operatorname{sh} y)^2 \\ &= (\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{ch}^2 y)(\sin^2 x \cdot \cos^2 y + \cos^2 x \cdot \sin^2 y)/2 \end{aligned}$$

式 1-(2)

$$\begin{aligned} & (\operatorname{sh} x \cdot \sin x \cdot \operatorname{ch} y \cdot \cos y)^2 - (\operatorname{ch} x \cdot \cos x \cdot \operatorname{sh} y \cdot \sin y)^2 + (\operatorname{ch} x \cdot \sin x \cdot \operatorname{sh} y \cdot \cos y)^2 - (\operatorname{sh} x \cdot \cos x \cdot \operatorname{ch} y \cdot \sin y)^2 \\ &= (\cos^2 y - \cos^2 x)(\operatorname{sh}^2 x \cdot \operatorname{ch}^2 y + \operatorname{ch}^2 x \cdot \operatorname{sh}^2 y)/2 \end{aligned}$$

式 1-(3)

$$\begin{aligned} & (\operatorname{sh} x \cdot \sin x \cdot \cos y \cdot \operatorname{ch} y)^2 - (\operatorname{ch} x \cdot \cos x \cdot \sin y \cdot \operatorname{sh} y)^2 - (\operatorname{ch} x \cdot \sin x \cdot \sin y \cdot \operatorname{ch} y)^2 + (\operatorname{sh} x \cdot \cos x \cdot \cos y \cdot \operatorname{sh} y)^2 \\ &= (\cos^2 x - \operatorname{ch}^2 y)(\operatorname{ch}^2 x \cdot \sin^2 y - \operatorname{sh}^2 x \cdot \cos^2 y)/2 \end{aligned}$$

式 1-(4)

$$\begin{aligned} & (\sin x \cdot \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} y \cdot \cos y)^2 - (\cos x \cdot \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{sh} y \cdot \sin y)^2 - (\cos x \cdot \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{sh} y \cdot \cos y)^2 + (\sin x \cdot \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{ch} y \cdot \sin y)^2 \\ &= (\operatorname{ch}^2 x - \cos^2 y)(\sin^2 x \cdot \operatorname{ch}^2 y - \cos^2 x \cdot \operatorname{sh}^2 y)/2 \end{aligned}$$

左辺もよいが、右辺も面白い形である！

式 1-(2)～式 1-(4) が式 1-(1) から関係式①～④を使って得られたことをもう一度確認したい。①～④は簡単に遠くの地点に連れて行ってくれる魔法の杖であり、途中の道程をワープさせてくれる感覚がいつもある。

●いま思いついたが

$$I(1) \times I(4) + I(2) \times I(3)$$

の辺々の計算ではなく、

$$I(1) \times I(4) - I(2) \times I(3)$$

こちらの辺々の計算をやると、また違ったなにかが出るような気がする。

=====

2025. 5. 25 杉岡幹生

<参考文献>

- ・「数学公式Ⅱ」(森口・宇田川・一松、岩波書店)
- ・「近世数学史談」(高木貞治著、共立出版)
- ・[ガウスと算術幾何平均 \(その42\)](#)
- ・「数学入門辞典」(岩波書店)