＜ 三角関数と双曲線関数の融合域（その３４）＞

新たに極限公式が七つ得られたので下方に青色式で示す。

今回は、π/4とL(2)とゼータの香りの漂う公式（ゼータ香り式）の式が得られたが、それらに対しては同グループの過去の式も一緒に示した。他のものは最新のもの二つずつを提示した（ただし$\pi^3/32$（L(3)）極限公式はいまだ一つだけである）。

なお、L(2)はL(2)＝$1 -1/3^2 +1/5^2 -1/7^2$ +−・・である（カタランの定数）。
ζ(3)はζ(3)＝$1 +1/2^3 +1/3^3 +1/4^3$ +・である。
π/4はL(1)そのものである。$\pi^2/6$はζ(2)、$\pi^2/8$は(3/4)ζ(2)である。
L(3)はL(3)＝$1 -1/3^3 +1/5^3 -1/7^3$ +−・・＝$\pi^3/32$である。

以下では、双曲線関数sinh, cosh, tanhはそれぞれsh, ch, thと略記した。例えば、sh2aはsinh(2a)のことである。a, xは任意の実数である。$\tan^{-1}$, th^{-1}はそれぞれarctan,arctanhである。logは自然対数、eは自然対数の底。sin, cos, tanは通常の表記である。

なお、limでのa->+0はaをプラス側から0に近づける意味であり、a->±0はaをプラス側,マイナス側どちらから0に近づけてもＯＫの意味である。

＝＝

＜ 極限公式 ＞

◆$2^{1/2}$ ／$2^{1/4}$ ／2^{-1}／2^2 極限公式

$$\frac{1}{2}=\lim_{a\to+0}\frac{\sin a}{2}\left(\frac{1}{\mathrm{cha}+\cos a}+\frac{1}{\mathrm{ch2a}+\cos a}+\frac{1}{\mathrm{ch3a}+\cos a}+\frac{1}{\mathrm{ch4a}+\cos a}+\cdot\cdot\right)$$ ---＜O1－2＞

$$4=\lim_{a\to+0}\left(\frac{\mathrm{cha}+\sin a}{\mathrm{cha}-\sin a}\right)^{e^{-a}}\left(\frac{\mathrm{ch2a}+\sin a}{\mathrm{ch2a}-\sin a}\right)^{e^{-2a}}\left(\frac{\mathrm{ch3a}+\sin a}{\mathrm{ch3a}-\sin a}\right)^{e^{-3a}}\left(\frac{\mathrm{ch4a}+\sin a}{\mathrm{ch4a}-\sin a}\right)^{e^{-4a}}\cdot\cdot$$ --＜Q1＞

◆L(2)極限公式

$$L(2)=\lim_{a\to\pm0}\mathrm{sha}\left(\tan^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{sha}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{sh3a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{sh5a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{sh7a}}\right)+\cdot\cdot\right)$$ ---＜S1＞

$$L(2)=\lim_{a\to\pm0}\mathrm{sh}^2\mathrm{a}\left(\frac{2}{\mathrm{ch2a}}+\frac{4}{\mathrm{ch4a}}+\frac{6}{\mathrm{ch6a}}+\frac{8}{\mathrm{ch8a}}+\cdot\cdot\right)$$ ----＜S1－2＞

$$L(2)=\lim_{a\to\pm0}\mathrm{sh}^2\mathrm{a}\left(\frac{1}{\mathrm{cha}}+\frac{3}{\mathrm{ch3a}}+\frac{5}{\mathrm{ch5a}}+\frac{7}{\mathrm{ch7a}}+\cdot\cdot\right)$$ ----＜S1－3＞

$$L(2)=\lim_{a\to\pm0}\mathrm{sha}\left(\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{sha}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{sh3a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{sh5a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{sh7a}}\right)+\cdot\cdot\right)$$ --＜S1－4＞

$$L(2)=\lim_{a\to\pm 0} 2\mathrm{sha}\left(\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{sh2a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{sh6a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{sh10a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{sh14a}}\right)+\cdot\cdot\right) \quad \text{--<S1-5>}$$

◆$\frac{\pi^2}{8}$極限公式　(3ξ(2)/4 極限公式)

$$\frac{\pi^2}{8}=\lim_{a\to+0} \mathrm{sh}^2\mathrm{a}\left(\frac{2}{\mathrm{sh2a}}+\frac{4}{\mathrm{sh4a}}+\frac{6}{\mathrm{sh6a}}+\frac{8}{\mathrm{sh8a}}+\cdot\cdot\right) \quad \text{----<S2-3>}$$

$$\frac{\pi^2}{8}=\lim_{a\to+0} \mathrm{sh}^2\mathrm{a}\left(\frac{1}{\mathrm{sha}}+\frac{3}{\mathrm{sh3a}}+\frac{5}{\mathrm{sh5a}}+\frac{7}{\mathrm{sh7a}}+\cdot\cdot\right) \quad \text{----<S2-4>}$$

◆$\frac{\pi^2}{6}$極限公式（ξ(2)極限公式)

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0} 2\mathrm{sh}^3\mathrm{a}\left(\frac{1^2}{\mathrm{sh}^2\mathrm{a}}+\frac{3^2}{\mathrm{sh}^2 3\mathrm{a}}+\frac{5^2}{\mathrm{sh}^2 5\mathrm{a}}+\frac{7^2}{\mathrm{sh}^2 7\mathrm{a}}+\cdot\cdot\right) \quad \text{---<S3-8>}$$

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0} 4(\mathrm{cha}-1)\left(\frac{1}{e^{a}+1}+\frac{2}{e^{2a}+1}+\frac{3}{e^{3a}+1}+\frac{4}{e^{4a}+1}+\cdot\cdot\right) \quad \text{----<S3-9>}$$

◆$\frac{\pi}{4}$極限公式　(L(1)極限公式)

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\to+0} \frac{(e^{a}-1)}{2}\left(\frac{1}{\mathrm{cha}}+\frac{1}{\mathrm{ch2a}}+\frac{1}{\mathrm{ch3a}}+\frac{1}{\mathrm{ch4a}}+\cdot\cdot\right) \quad \text{----<S4-1>}$$

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\to+0} \mathrm{sha}\left(\frac{1}{\mathrm{cha}}+\frac{1}{\mathrm{ch3a}}+\frac{1}{\mathrm{ch5a}}+\frac{1}{\mathrm{ch7a}}+\cdot\cdot\right) \quad \text{----<S4-2>}$$

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\to+0} \mathrm{sh}^2\mathrm{a}\left(\frac{2\mathrm{sh2a}}{\mathrm{ch}^2 2\mathrm{a}}+\frac{4\mathrm{sh4a}}{\mathrm{ch}^2 4\mathrm{a}}+\frac{6\mathrm{sh6a}}{\mathrm{ch}^2 6\mathrm{a}}+\frac{8\mathrm{sh8a}}{\mathrm{ch}^2 8\mathrm{a}}+\cdot\cdot\right) \quad \text{---<S4-3>}$$

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\to+0} 2\mathrm{sha}\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{ch2a}+\mathrm{cha}}+\frac{\mathrm{ch3a}}{\mathrm{ch6a}+\mathrm{cha}}+\frac{\mathrm{ch5a}}{\mathrm{ch10a}+\mathrm{cha}}+\frac{\mathrm{ch7a}}{\mathrm{ch14a}+\mathrm{cha}}+\cdot\cdot\right) \quad \text{--<S4-4>}$$

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\to+0} 2\left(\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch2a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch6a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch10a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch14a}}\right)+\cdot\cdot\right) \quad \text{--<S4-5>}$$

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\to+0} \left(\tan^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{sha}}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{sh3a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{sh5a}}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{sh7a}}\right)+-\cdot\cdot\right) \quad \text{--<S4-6>}$$

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\to+0} 4\left(\tan^{-1}\left(\frac{sha}{ch4a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{sha}{ch12a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{sha}{ch20a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{sha}{ch28a}\right)+\cdot\cdot\right) \quad \text{--<S4-7>}$$

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\to+0} 2sha\left(\frac{ch2a}{ch4a+cha}+\frac{ch4a}{ch8a+cha}+\frac{ch6a}{ch12a+cha}+\frac{ch8a}{ch16a+cha}+\cdot\cdot\right) \quad \text{----<S4-8>}$$

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\to+0}\left(\tan^{-1}\left(\frac{cosa}{sha}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{cosa}{sh3a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{cosa}{sh5a}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{cosa}{sh7a}\right)+-\cdot\cdot\right) \quad \text{--<S4-9>}$$

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\to+0} 2\left(\tan^{-1}\left(\frac{sha}{ch4a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{sha}{ch8a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{sha}{ch12a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{sha}{ch16a}\right)+\cdot\cdot\right) \quad \text{--<S4-10>}$$

◆log2 極限公式

$$\log 2=\lim_{a\to+0} 2sha\left(sha\cdot\log\left(\frac{cha}{sha}\right)+sh3a\cdot\log\left(\frac{ch3a}{sh3a}\right)+sh5a\cdot\log\left(\frac{ch5a}{sh5a}\right)+\cdot\cdot\right) \quad \text{---<S5-5>}$$

$$\log 2=\lim_{a\to+0}(e^{a}-1)\left(sha\cdot\log\left(\frac{cha}{sha}\right)+sh2a\cdot\log\left(\frac{ch2a}{sh2a}\right)+sh3a\cdot\log\left(\frac{ch3a}{sh3a}\right)+\cdot\cdot\right) \quad \text{--<S5-6>}$$

◆ζ(3)極限公式

$$\zeta(3)=\lim_{a\to+0} sh^{3}a\left(\frac{1^2}{e^{a}-1}+\frac{3^2}{e^{3a}-1}+\frac{5^2}{e^{5a}-1}+\frac{7^2}{e^{7a}-1}+\cdot\cdot\right) \quad \text{----<S6-11>}$$

$$\zeta(3)=\lim_{a\to\pm0}\frac{4sh^{3}a}{7}\left(\frac{1^2}{sha}+\frac{3^2}{sh3a}+\frac{5^2}{sh5a}+\frac{7^2}{sh7a}+\cdot\cdot\right) \quad \text{----<S6-12>}$$

◆ $\frac{\pi^3}{32}$極限公式　(L (3) 極限公式)

$$\frac{\pi^3}{32}=\lim_{a\to+0} 2sh^{3}a\left(\frac{1^2}{ch2a}+\frac{2^2}{ch4a}+\frac{3^2}{ch6a}+\frac{4^2}{ch8a}+\cdot\cdot\right) \quad \text{---<S7-1>}$$

◆ e^{π}極限公式

$$e^{\pi}=\lim_{a\to+0}\left(\frac{cha+\sin a}{cha-\sin a}\right)\left(\frac{ch2a+\sin a}{ch2a-\sin a}\right)\left(\frac{ch3a+\sin a}{ch3a-\sin a}\right)\left(\frac{ch4a+\sin a}{ch4a-\sin a}\right)\cdot\cdot \quad \text{--<S8-1>}$$

$$e^{\pi}=\lim_{a\to+0}\left(\frac{\mathrm{ch}a+\sin a}{\mathrm{ch}a-\sin a}\right)^2\left(\frac{\mathrm{ch}3a+\sin a}{\mathrm{ch}3a-\sin a}\right)^2\left(\frac{\mathrm{ch}5a+\sin a}{\mathrm{ch}5a-\sin a}\right)^2\left(\frac{\mathrm{ch}7a+\sin a}{\mathrm{ch}7a-\sin a}\right)^2\cdots \quad \text{--<S8-2>}$$

◆ $e^{\pi x}$［恒等］極限公式

$$e^{\pi x}=\lim_{a\to+0}\left(\frac{\mathrm{ch}a+\sin ax}{\mathrm{ch}a-\sin ax}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}2a+\sin ax}{\mathrm{ch}2a-\sin ax}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}3a+\sin ax}{\mathrm{ch}3a-\sin ax}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}4a+\sin ax}{\mathrm{ch}4a-\sin ax}\right)\cdots \quad \text{--<S8-1-2>}$$

$$e^{\pi x}=\lim_{a\to+0}\left(\frac{\mathrm{ch}a+\sin ax}{\mathrm{ch}a-\sin ax}\right)^2\left(\frac{\mathrm{ch}3a+\sin ax}{\mathrm{ch}3a-\sin ax}\right)^2\left(\frac{\mathrm{ch}5a+\sin ax}{\mathrm{ch}5a-\sin ax}\right)^2\left(\frac{\mathrm{ch}7a+\sin ax}{\mathrm{ch}7a-\sin ax}\right)^2\cdots \quad \text{--<S8-2-2>}$$

◆ ゼータの香りの漂う公式の極限公式

$$\frac{1}{2}-\frac{\pi\,\mathrm{ch}\,\pi}{\mathrm{sh}\,2\pi}=\frac{1}{1^2+1}-\frac{1}{2^2+1}+\frac{1}{3^2+1}-\frac{1}{4^2+1}+-\cdots$$

$$=\lim_{a\to+0}\sin a\left(\frac{\sin a}{e^{a}+1}+\frac{\sin 2a}{e^{2a}+1}+\frac{\sin 3a}{e^{3a}+1}+\frac{\sin 4a}{e^{4a}+1}+\cdots\right) \quad \text{----<S9-1>}$$

$$-\frac{1}{2}+\frac{(\pi/2)}{\mathrm{th}\,\pi}=\frac{1}{1^2+1}+\frac{1}{2^2+1}+\frac{1}{3^2+1}+\frac{1}{4^2+1}+\cdots$$

$$=\lim_{a\to+0}\sin a\left(\frac{\sin a}{e^{a}-1}+\frac{\sin 2a}{e^{2a}-1}+\frac{\sin 3a}{e^{3a}-1}+\frac{\sin 4a}{e^{4a}-1}+\cdots\right) \quad \text{----<S9-2>}$$

$$\frac{1}{2}-\frac{\pi\,\mathrm{ch}\,\pi}{\mathrm{sh}\,2\pi}=\frac{1}{1^2+1}-\frac{1}{2^2+1}+\frac{1}{3^2+1}-\frac{1}{4^2+1}+-\cdots$$

$$=\lim_{a\to+0}2\sin a\left(\frac{\sin a}{e^{a}+1}+\frac{\sin 3a}{e^{3a}+1}+\frac{\sin 5a}{e^{5a}+1}+\frac{\sin 7a}{e^{7a}+1}+\cdots\right) \quad \text{----<S9-3>}$$

$$-\frac{1}{2}+\frac{(\pi/2)}{\mathrm{th}\,\pi}=\frac{1}{1^2+1}+\frac{1}{2^2+1}+\frac{1}{3^2+1}+\frac{1}{4^2+1}+\cdots$$

$$=\lim_{a\to+0}2\sin a\left(\frac{\sin a}{e^{a}-1}+\frac{\sin 3a}{e^{3a}-1}+\frac{\sin 5a}{e^{5a}-1}+\frac{\sin 7a}{e^{7a}-1}+\cdots\right) \quad \text{----<S9-4>}$$

$$\frac{1}{1^2+1}-\frac{2}{2^2+1}+\frac{3}{3^2+1}-\frac{4}{4^2+1}+-\cdot\cdot$$

$$=\lim_{a\to+0} 2\mathrm{sina}\left(\frac{\mathrm{cosa}}{e^{a}+1}+\frac{\mathrm{cos3a}}{e^{3a}+1}+\frac{\mathrm{cos5a}}{e^{5a}+1}+\frac{\mathrm{cos7a}}{e^{7a}+1}+\cdot\cdot\right)$$ ----＜S9−5＞

$$\frac{1}{1^2+1}-\frac{2}{2^2+1}+\frac{3}{3^2+1}-\frac{4}{4^2+1}+-\cdot\cdot$$

$$=\lim_{a\to+0} \mathrm{sina}\left(\frac{\mathrm{cosa}}{e^{a}+1}+\frac{\mathrm{cos2a}}{e^{2a}+1}+\frac{\mathrm{cos3a}}{e^{3a}+1}+\frac{\mathrm{cos4a}}{e^{4a}+1}+\cdot\cdot\right)$$ ----＜S9−6＞

$$\frac{(\pi/2)^2\mathrm{ch}(\pi/2)}{\mathrm{sh}^2(\pi/2)}-\frac{(\pi/2)}{\mathrm{sh}(\pi/2)}=4\left(\frac{2^2}{(2^2+1)^2}-\frac{4^2}{(4^2+1)^2}+\frac{6^2}{(6^2+1)^2}-\frac{8^2}{(8^2+1)^2}+-\cdot\cdot\right)$$

$$=\lim_{a\to+0}(\mathrm{cha}-\mathrm{cosa})\left(\frac{\mathrm{sina}}{\mathrm{ch}^2\mathrm{a}}+\frac{2\mathrm{sin2a}}{\mathrm{ch}^2\mathrm{2a}}+\frac{3\mathrm{sin3a}}{\mathrm{ch}^2\mathrm{3a}}+\frac{4\mathrm{sin4a}}{\mathrm{ch}^2\mathrm{4a}}+\cdot\cdot\right)$$ ---＜S9−7＞

$$\frac{(\pi/2)}{\mathrm{th}(\pi/2)}-\frac{(\pi/2)^2}{\mathrm{sh}^2(\pi/2)}=4\left(\frac{2^2}{(2^2+1)^2}+\frac{4^2}{(4^2+1)^2}+\frac{6^2}{(6^2+1)^2}+\frac{8^2}{(8^2+1)^2}+\cdot\cdot\right)$$

$$=\lim_{a\to+0}\sin^2 a\left(\frac{\mathrm{sina}}{\mathrm{sh}^2\mathrm{a}}+\frac{2\mathrm{sin2a}}{\mathrm{sh}^2\mathrm{2a}}+\frac{3\mathrm{sin3a}}{\mathrm{sh}^2\mathrm{3a}}+\frac{4\mathrm{sin4a}}{\mathrm{sh}^2\mathrm{4a}}+\cdot\cdot\right)$$ ---＜S9−8＞

================================

これら七つの青色式が得られた。Wolfram Alpha の数値検証でも式の成立を確認している。

π/4 と L(2) の式を再掲。

$$L(2)=\lim_{a\to\pm0} 2\mathrm{sha}\left(\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{sh2a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{sh6a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{sh10a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{sh14a}}\right)+\cdot\cdot\right)$$ --＜S1−5＞

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\to+0} 2\mathrm{sha}\left(\frac{\mathrm{ch2a}}{\mathrm{ch4a+cha}}+\frac{\mathrm{ch4a}}{\mathrm{ch8a+cha}}+\frac{\mathrm{ch6a}}{\mathrm{ch12a+cha}}+\frac{\mathrm{ch8a}}{\mathrm{ch16a+cha}}+\cdot\cdot\right)$$ ----＜S4−8＞

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\to+0}\left(\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{cosa}}{\mathrm{sha}}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{cosa}}{\mathrm{sh3a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{cosa}}{\mathrm{sh5a}}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{cosa}}{\mathrm{sh7a}}\right)+-\cdot\cdot\right)$$ --＜S4−9＞

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\to+0} 2\left(\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch4a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch8a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch12a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch16a}}\right)+\cdot\cdot\right)$$ --＜S4−10＞

どれもきれいな式だが、私の独断と偏見では＜Ｓ４－８＞が<u>最も美しい</u>。

今回の式の中から＜Ｓ４－８＞の証明を以下に示す。詳細な式変形はとばした。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

＜S4－8＞の証明

下式[1]の左辺から出発する。それに対し、１３年前のこちらの 2012/8/16 の[導出]と類似的な方法を使って変形していき[1]右辺に到達する。途中でゼータの香りの漂う・・（その３０７）でのフーリエ級数を使う。（注意：その頁でフーリエ級数の表現を使っているが、それらは恒等式である。x に制限を加えているが、じつは x は任意の実数である）。この[1]は二変数の恒等式となっている。

$$\frac{\cos x}{e^{a}-1}-\frac{\cos 3x}{e^{3a}-1}+\frac{\cos 5x}{e^{5a}-1}-\frac{\cos 7x}{e^{7a}-1}+-\cdot\cdot$$

$$=\cos x\left(\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}2a+\cos 2x}+\frac{\mathrm{ch}2a}{\mathrm{ch}4a+\cos 2x}+\frac{\mathrm{ch}3a}{\mathrm{ch}6a+\cos 2x}+\frac{\mathrm{ch}4a}{\mathrm{ch}8a+\cos 2x}+\cdot\cdot\right)\text{----[1]}$$

$(a>0,\ x$ は任意実数$)$

上式で x を ai/4（i：虚数単位）で置き換え、cos(ai)＝cosh(a)の公式を使って式変形を重ね、a を 4a で置き換えて次となる。

$$\frac{1}{(e^{2a}-1)e^{a}}-\frac{1}{(e^{6a}-1)e^{3a}}+\frac{1}{(e^{10a}-1)e^{5a}}-\frac{1}{(e^{14a}-1)e^{7a}}+-\cdot\cdot$$

$$=2\mathrm{ch}a\left(\frac{\mathrm{ch}4a}{\mathrm{ch}8a+\mathrm{ch}2a}+\frac{\mathrm{ch}8a}{\mathrm{ch}16a+\mathrm{ch}2a}+\frac{\mathrm{ch}12a}{\mathrm{ch}24a+\mathrm{ch}2a}+\frac{\mathrm{ch}16a}{\mathrm{ch}32a+\mathrm{ch}2a}+\cdot\cdot\right)\text{----[2]}$$

$(a>0)$

この両辺に sha を掛けて（左辺は各項に sha を掛ける！）、a を 0 に近づけていく（a->0）。左辺はロピタルの定理から(π/4)/2 となり、最後に 2a を a で置き換えて、目標の次の＜Ｓ４－８＞に到達する。

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\to+0}2\mathrm{sha}\left(\frac{\mathrm{ch}2a}{\mathrm{ch}4a+\mathrm{cha}}+\frac{\mathrm{ch}4a}{\mathrm{ch}8a+\mathrm{cha}}+\frac{\mathrm{ch}6a}{\mathrm{ch}12a+\mathrm{cha}}+\frac{\mathrm{ch}8a}{\mathrm{ch}16a+\mathrm{cha}}+\cdot\cdot\right)\quad\text{----<S4-8>}$$

終わり。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

＜Ｓ４－８＞はこのようにして得られた。証明のポイントは二つある。一つ目は最初の下線部分で変数 x を変数 a に置き換えた点。二つ目は２番目の下線の所でわざわざ sha を掛けた点である。前者は数理哲学的に深い意味があり、後者は強引にロピタル定理を適用可能とするための操作であることは、これまで述べてきた通りである。

最後に、気になる点や想うことなど述べておく。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

●＜Ｓ４－４＞と＜Ｓ４－８＞を比べよう。

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\to+0}2\mathrm{sha}\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{ch}2a+\mathrm{cha}}+\frac{\mathrm{ch}3a}{\mathrm{ch}6a+\mathrm{cha}}+\frac{\mathrm{ch}5a}{\mathrm{ch}10a+\mathrm{cha}}+\frac{\mathrm{ch}7a}{\mathrm{ch}14a+\mathrm{cha}}+\cdot\cdot\right)\quad\text{--<S4-4>}$$

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\to+0}2\mathrm{sha}\left(\frac{\mathrm{ch}2a}{\mathrm{ch}4a+\mathrm{cha}}+\frac{\mathrm{ch}4a}{\mathrm{ch}8a+\mathrm{cha}}+\frac{\mathrm{ch}6a}{\mathrm{ch}12a+\mathrm{cha}}+\frac{\mathrm{ch}8a}{\mathrm{ch}16a+\mathrm{cha}}+\cdot\cdot\right)\quad\text{---<S4-8>}$$

　このニつは似ている。似ているが、ちょっと違う。上側式は数列 1, 3, 5, 7・・タイプの並び、下側式は数列 1, 2, 3, 4, ・・タイプの並びが基調となっている。証明はできても、やはりこれらはふしぎである。

●<Ｓ４－７>と<Ｓ４－１０>を並べよう。

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\to+0} 4\left(\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch4a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch12a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch20a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch28a}}\right)+\cdot\cdot\right) \quad \text{--<S4-7>}$$

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\to+0} 2\left(\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch4a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch8a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch12a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch16a}}\right)+\cdot\cdot\right) \quad \text{--<S4-10>}$$

　これらも似ている。
上側式は数列 1, 3, 5, 7・・タイプの並び、下側式は数列 1, 2, 3, 4, ・・タイプの並びとなっている。

●<Ｓ４－７>と<Ｓ１－５>を比べる。

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\to+0} 4\left(\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch4a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch12a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch20a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch28a}}\right)+\cdot\cdot\right) \quad \text{--<S4-7>}$$

$$\mathrm{L}(2)=\lim_{a\to\pm0} 2\mathrm{sha}\left(\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{sh2a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{sh6a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{sh10a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{sh14a}}\right)+\cdot\cdot\right) \quad \text{--<S1-5>}$$

L(2)はいまだ謎をもった数だが、π/4 の<Ｓ４－７>などと比べると、なんとなく面白い。
　・L(2)式の方は全体に sha が掛かっているが、π/4 式は掛かっていない。
　・$\tan^{-1}$()の()内の分母、分子の sh, ch の関係が逆になっている。

●証明中でも一部使ったが、以下の公式は常に非常によく使う。i は虚数単位。
　cos(ai)＝cosh(a)
　sin(ai)＝i・sinh(a)
　cosh(ai)＝cos(a)
　sinh(ai)＝i・sin(a)

　多数の母等式に対しこの公式とロピタルの定理などを適用し組み合わせることで、多くの公式を得ることができる。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

2025.3.1　杉岡幹生

<参考文献>

・「マグロウヒル　数学公式・数表ハンドブック」(Murray R. Spiegel 著、氏家勝巳訳、オーム社)
・「数学公式Ⅱ」(森口・宇田川・一松、岩波書店)