

## 剣持の球面等円定理

山崎憲久

江戸時代後期の和算家・剣持章行(1798-1873)が遺した問題として、東北大学の林鶴一先生が大正時代に取り上げたのが、球面画等円術 (Equal Circle on the Sphere) である。

そのなかで、剣持は右図のように球面上に等円をつねに隙間が三円弧からなるようにして覆う問題を立て、

- (1) 3個
- (2) まず1個、次に3個、計4個
- (3) まず1個、次に4個、さらに1個、計6個
- (4) まず1個、次に5個、さらに5個、さらに1個、計12個

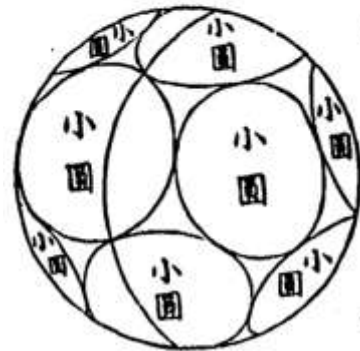
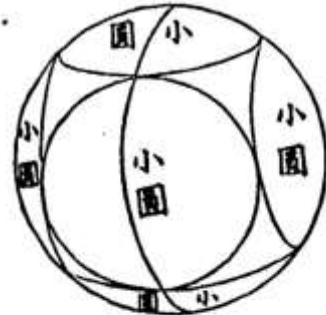
をあげ、これら4種に限ると言明している。

これを仮に剣持の球面等円定理と呼ぶことにするが、この定理に証明を与えることがここでの課題である。

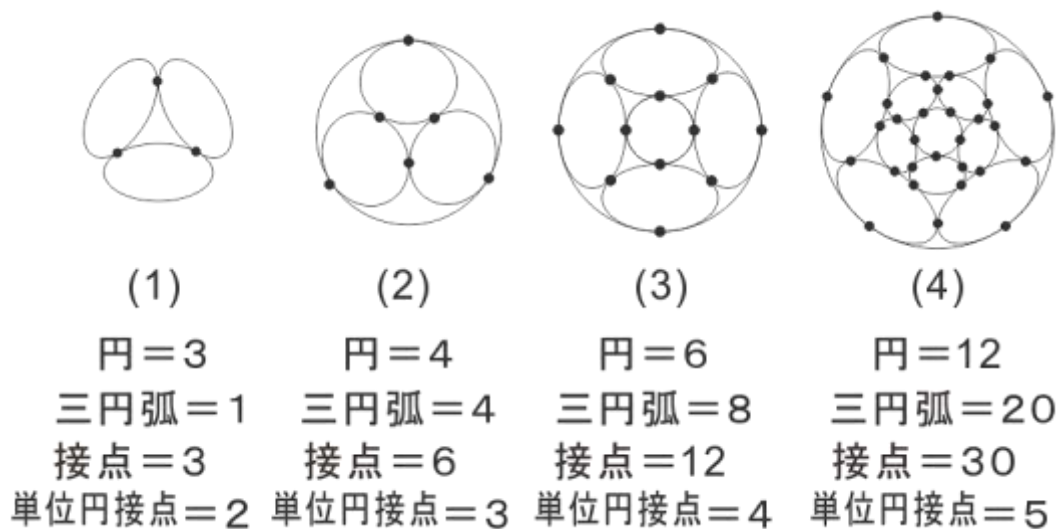
林先生は剣持の結論は正しいが、少々理論の厳正を欠くと評価したうえで、(2)(3)(4)の隣接する円の中心を結べば正四面体、正八面体、正二十面体が得られることを、西洋の5種類のプラトン立体との対比において指摘している。

私の観点からすると、(2)(3)(4)の隣接する三円弧図形の中心を結べば、同一の球に内接し、それぞれの双対である正四面体、正六面体、正十二面体が得られることも合わせて敷衍することができるので、剣持の定理からは正多面体が5種類に限られることが導かれると言っているのではないかと思う。

ちなみに、右の写真は長野県の高井郡の古墳の副葬品であるが、剣持の(4)に当たる。和算家がこの種の工芸品を知っていたとは思えないが、興味深い一致だと思う。

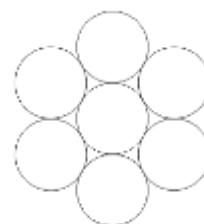


さらには、(1) の等円3個の場合が含まれていることは、大円弧ダヴィンチボールが10種類であることの証明を目指している私にとっては魅力的なのである。ひとまず、大円弧ダヴィンチボールの場合と同様に、シュレーゲル図風に表してみる。



ここから見て取れることは、剣持の問題設定は、球面上の単位円当たりの接点数を等しくすることと同義であるということである。このことは円の大きさが等しく、3円弧で囲まれる図形の大きさも等しいことから必然となる。

単位円当たりの接点を6にすると右のようになるので、剣持が指摘するように平面となって、球面に添わせることはできない。さらに、単位円当たり7つ以上の等円を接することはできないことも明らかである。



したがって、単位円当たりの接点が5以下の場合に、(1) (2) (3) (4) 以外の等円配置があるかどうかを調べ上げればよいことになる。

(ア) 単位円当たりの接点が2の場合は、隣の円との接点を通る直径方向にいくつでも円をつないで両端を閉じることで任意の  $n$  個の円を球面に配置することができるが、その場合の隙間は  $n$  円弧図形2つとなるので、隙間を三円弧図形に限定した剣持の条件を満たさない。



(イ) 単位円当たりの接点が3になるようにするには、3つの円がたがいに接した下左の図の配置から始めるほかない。

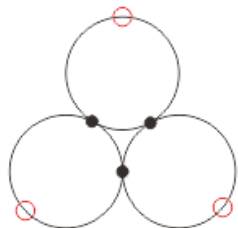
右のような2つの円が接した配置に1つの円を加えて、単位円当たりの接点を3つにすることは不可能だからだ。



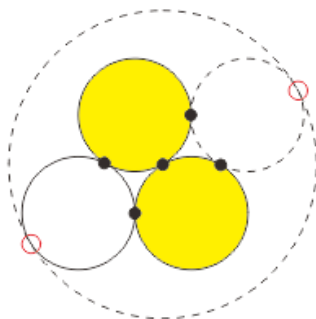
下の図左の配置の赤丸を接点とするように1つの円を加えたものが剣持の(2)である。最後の円を加える前の状況を下図のように変化させてみる。

中央の図のように4つの円を配置すると、黄色い円はすでに3接点を持っているのでもう1つの円と接することはできない。もう1つの円との接点は2つの赤丸だけとなるが、その場合には隙間は四円弧図形が2つになってしまう。

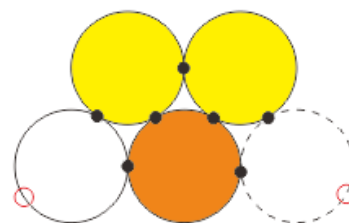
また、右の図のように、5つの円を配置すれば、オレンジ色の円の接点がこの時点で4となって条件を外れる。この状況は5つ目の円の位置にかかわらない。したがって5以上の円から始めることは不可能である。



三円弧 = 1



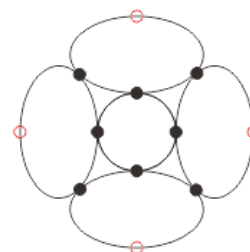
三円弧 = 2



三円弧 = 3

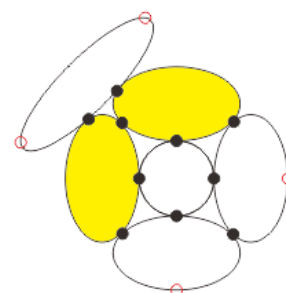
(ハ) 単位円当たりの接点が4になるようにするには、右の図の配置から始めるほかない。

中央の円に4つの円が接しかつ三円弧図形ができるのはこの配置以外にないからだ。

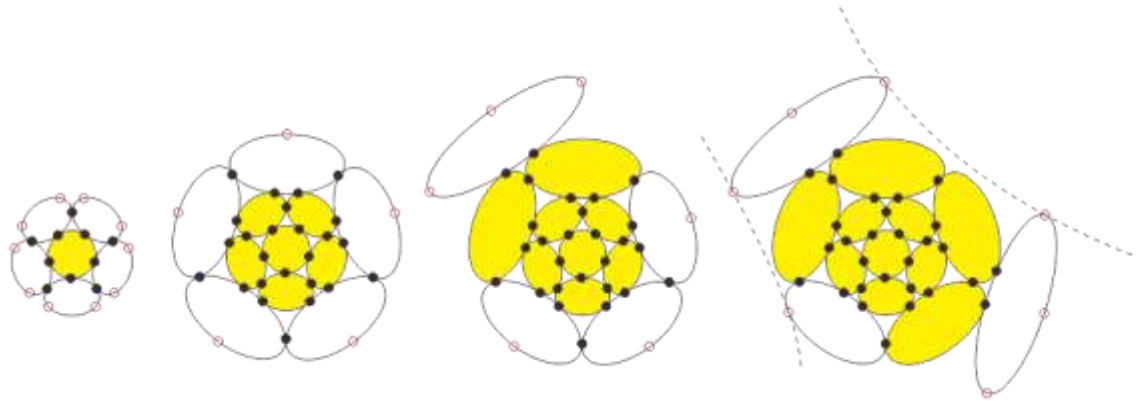


次の1円を右のように配置すると、黄色い円がすでに4接点を持っているので、その次の1円には触れることができない。その結果隙間は四円弧以上の図形となって条件を外れる。

よって、最後の1円は上の図の赤い丸4つに接するほかないので、これは剣持の(3)である。



(二) 単位円当たりの接点が5になるようにするには、下図の左端の梅の花のような配置から始めるほかない。



このとき、外側の円の空き接点は2個ずつなので、そのさらに外側に接する円の配置も、左から2番目の配置以外に隙間を三円弧にする方法はない。次に1円を加えて右から2番目の図、もう1円を加えて右端の図のように配置すると、次の円は点線の図の位置に置くほかないが、その際には隙間が四円弧図形、五円弧図形となってしまふ。よって、左から2番目の配置には、最後の1円を剣持の(4)とする以外にはできないのである。

以上で、剣持の定理の厳密な証明となったであろうか。