＜ 三角関数と双曲線関数の融合域（その３３）＞

新たに極限公式が五つ得られたので下方に青色式で示す。ゼータの香りの漂う公式（略す場合は“ゼータ香り式”）の極限公式が今回はじめて得られた。
紙幅節約と見やすさの面から、これまでの極限公式はπ^2/6、e$^{\pi}$関連の極限公式のみを示した。

以下では、双曲線関数 sinh, cosh, tanh はそれぞれ sh, ch, th と略記した。例えば、sh2a は sinh(2a)のことである。a は任意の実数である。$\tan^{-1}$, th^{-1} はそれぞれ arctan,arctanh である。log は自然対数、e は自然対数の底。sin, cos, tan は通常の表記である。

なお、lim での a->+0 は a をプラス側から 0 に近づける意味である。

＝＝

＜ 極限公式 ＞

◆$\frac{\pi^2}{6}$極限公式（ζ(2)極限公式）

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0}(1-e^{a})\log\left((1-e^{-a})(1-e^{-2a})(1-e^{-3a})(1-e^{-4a})\cdot\cdot\right) \quad \text{----<S3>}$$

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0}2\mathrm{sh}^3a\left(\frac{1^2}{\mathrm{ch}^2a}+\frac{2^2}{\mathrm{ch}^2 2a}+\frac{3^2}{\mathrm{ch}^2 3a}+\frac{4^2}{\mathrm{ch}^2 4a}+\cdot\cdot\right) \quad \text{---<S3-2>}$$

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0}\mathrm{sh}^3a\left(\frac{1^2}{\mathrm{sh}^2a}+\frac{2^2}{\mathrm{sh}^2 2a}+\frac{3^2}{\mathrm{sh}^2 3a}+\frac{4^2}{\mathrm{sh}^2 4a}+\cdot\cdot\right) \quad \text{---<S3-3>}$$

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0}4\mathrm{sh}^2a\left(\frac{1}{e^{a}+1}+\frac{3}{e^{3a}+1}+\frac{5}{e^{5a}+1}+\frac{7}{e^{7a}+1}+\cdot\cdot\right) \quad \text{----<S3-4>}$$

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0}2\mathrm{sh}^2a\left(\frac{1}{e^{a}-1}+\frac{3}{e^{3a}-1}+\frac{5}{e^{5a}-1}+\frac{7}{e^{7a}-1}+\cdot\cdot\right) \quad \text{----<S3-5>}$$

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0}4\mathrm{sh}^2a\left(\frac{1}{e^{2a}-1}+\frac{2}{e^{4a}-1}+\frac{3}{e^{6a}-1}+\frac{4}{e^{8a}-1}+\cdot\cdot\right) \quad \text{----<S3-6>}$$

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0}4\mathrm{sh}^3a\left(\frac{1^2}{\mathrm{ch}^2a}+\frac{3^2}{\mathrm{ch}^2 3a}+\frac{5^2}{\mathrm{ch}^2 5a}+\frac{7^2}{\mathrm{ch}^2 7a}+\cdot\cdot\right) \quad \text{---<S3-7>}$$

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0}2\mathrm{sh}^3a\left(\frac{1^2}{\mathrm{sh}^2a}+\frac{3^2}{\mathrm{sh}^2 3a}+\frac{5^2}{\mathrm{sh}^2 5a}+\frac{7^2}{\mathrm{sh}^2 7a}+\cdot\cdot\right) \quad \text{---<S3-8>}$$

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0} 4(\mathrm{ch}a-1)\left(\frac{1}{e^a+1}+\frac{2}{e^{2a}+1}+\frac{3}{e^{3a}+1}+\frac{4}{e^{4a}+1}+\cdot\cdot\right) \quad \text{----<S3-9>}$$

◆ e^{π}極限公式

$$e^{\pi}=\lim_{a\to+0}\left(\frac{\mathrm{ch}a+\sin a}{\mathrm{ch}a-\sin a}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}2a+\sin a}{\mathrm{ch}2a-\sin a}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}3a+\sin a}{\mathrm{ch}3a-\sin a}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}4a+\sin a}{\mathrm{ch}4a-\sin a}\right)\cdot\cdot \quad \text{--<S8-1>}$$

$$e^{\pi}=\lim_{a\to+0}\left(\frac{\mathrm{ch}a+\sin a}{\mathrm{ch}a-\sin a}\right)^2\left(\frac{\mathrm{ch}3a+\sin a}{\mathrm{ch}3a-\sin a}\right)^2\left(\frac{\mathrm{ch}5a+\sin a}{\mathrm{ch}5a-\sin a}\right)^2\left(\frac{\mathrm{ch}7a+\sin a}{\mathrm{ch}7a-\sin a}\right)^2\cdot\cdot \quad \text{--<S8-2>}$$

◆ $e^{\pi x}$［恒等］極限公式

$$e^{\pi x}=\lim_{a\to+0}\left(\frac{\mathrm{ch}a+\sin ax}{\mathrm{ch}a-\sin ax}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}2a+\sin ax}{\mathrm{ch}2a-\sin ax}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}3a+\sin ax}{\mathrm{ch}3a-\sin ax}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}4a+\sin ax}{\mathrm{ch}4a-\sin ax}\right)\cdot\cdot \quad \text{--<S8-1-2>}$$

x は任意の実数

$$e^{\pi x}=\lim_{a\to+0}\left(\frac{\mathrm{ch}a+\sin ax}{\mathrm{ch}a-\sin ax}\right)^2\left(\frac{\mathrm{ch}3a+\sin ax}{\mathrm{ch}3a-\sin ax}\right)^2\left(\frac{\mathrm{ch}5a+\sin ax}{\mathrm{ch}5a-\sin ax}\right)^2\left(\frac{\mathrm{ch}7a+\sin ax}{\mathrm{ch}7a-\sin ax}\right)^2\cdot\cdot \quad \text{--<S8-2-2>}$$

x は任意の実数

◆ ゼータの香りの漂う公式の極限公式

$$\frac{1}{2}-\frac{\pi\,\mathrm{ch}\,\pi}{\mathrm{sh}2\,\pi}=\frac{1}{1^2+1}-\frac{1}{2^2+1}+\frac{1}{3^2+1}-\frac{1}{4^2+1}+-\cdot\cdot$$

$$=\lim_{a\to+0}\sin a\left(\frac{\sin a}{e^a+1}+\frac{\sin 2a}{e^{2a}+1}+\frac{\sin 3a}{e^{3a}+1}+\frac{\sin 4a}{e^{4a}+1}+\cdot\cdot\right) \quad \text{----<S9-1>}$$

$$-\frac{1}{2}+\frac{(\pi/2)}{\mathrm{th}\,\pi}=\frac{1}{1^2+1}+\frac{1}{2^2+1}+\frac{1}{3^2+1}+\frac{1}{4^2+1}+\cdot\cdot$$

$$=\lim_{a\to+0}\sin a\left(\frac{\sin a}{e^a-1}+\frac{\sin 2a}{e^{2a}-1}+\frac{\sin 3a}{e^{3a}-1}+\frac{\sin 4a}{e^{4a}-1}+\cdot\cdot\right) \quad \text{----<S9-2>}$$

$$\frac{1}{2}-\frac{\pi\,\mathrm{ch}\,\pi}{\mathrm{sh}2\,\pi}=\frac{1}{1^2+1}-\frac{1}{2^2+1}+\frac{1}{3^2+1}-\frac{1}{4^2+1}+-\cdot\cdot$$

$$=\lim_{a\to+0} 2\mathrm{sina}\left(\frac{\mathrm{sina}}{e^{a}+1}+\frac{\mathrm{sin3a}}{e^{3a}+1}+\frac{\mathrm{sin5a}}{e^{5a}+1}+\frac{\mathrm{sin7a}}{e^{7a}+1}+\cdot\cdot\right) \qquad ----\text{<S9-3>}$$

$$-\frac{1}{2}+\frac{(\pi/2)}{\mathrm{th}\,\pi}=\frac{1}{1^2+1}+\frac{1}{2^2+1}+\frac{1}{3^2+1}+\frac{1}{4^2+1}+\cdot\cdot$$

$$=\lim_{a\to+0} 2\mathrm{sina}\left(\frac{\mathrm{sina}}{e^{a}-1}+\frac{\mathrm{sin3a}}{e^{3a}-1}+\frac{\mathrm{sin5a}}{e^{5a}-1}+\frac{\mathrm{sin7a}}{e^{7a}-1}+\cdot\cdot\right) \qquad ----\text{<S9-4>}$$

$$\frac{1}{1^2+1}-\frac{2}{2^2+1}+\frac{3}{3^2+1}-\frac{4}{4^2+1}+-\cdot\cdot$$

$$=\lim_{a\to+0} 2\mathrm{sina}\left(\frac{\mathrm{cosa}}{e^{a}+1}+\frac{\mathrm{cos3a}}{e^{3a}+1}+\frac{\mathrm{cos5a}}{e^{5a}+1}+\frac{\mathrm{cos7a}}{e^{7a}+1}+\cdot\cdot\right) \qquad ----\text{<S9-5>}$$

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

今回はこれら五つの青色式が得られた。sina は sin(a)の意味である。Wolfram Alpha の数値検証でも式の成立を確認している。

これまでの極限公式は、過去に得ていた多くの母等式やその派生式（恒等式）にロピタルの定理を無理やり適用できる形にするという方針で出していたが、それはわかりやすい導出方法であった。例えていえば、それは、地表に落ちている化石を拾うというような感じのかなり容易な方法であった。

今回のゼータ香り式は、少し気づきにくい式変形で得られた。（ゼータではなく）ゼータ香り式が出たとき、こんな式変形があったのか！と思った。それはいわば、岩の割れ目にかすかに見えていた化石を見つけたというような感じであった。

上記の青色式のうち、＜Ｓ９－５＞だけはゼータ香り式の値が明示的なものとして得られていない。他の四式は公式集にもその明示値はあり（「数学公式Ⅱ」岩波書店）p.48）、さらには１５年も前に私は独自の方法でそれらの値を出していたので（⇒高見沢彗星　その６）最初はそこから値を得たのだが、しかし＜Ｓ９－５＞の左辺の値は出していないので、その明示値はわからない。

＜Ｓ９－１＞を再掲。

$$\frac{1}{2}-\frac{\pi\,\mathrm{ch}\,\pi}{\mathrm{sh}2\pi}=\frac{1}{1^2+1}-\frac{1}{2^2+1}+\frac{1}{3^2+1}-\frac{1}{4^2+1}+-\cdot\cdot$$

$$=\lim_{a\to+0} \mathrm{sina}\left(\frac{\mathrm{sina}}{e^{a}+1}+\frac{\mathrm{sin2a}}{e^{2a}+1}+\frac{\mathrm{sin3a}}{e^{3a}+1}+\frac{\mathrm{sin4a}}{e^{4a}+1}+\cdot\cdot\right) \qquad ----\text{<S9-1>}$$

今回の式の中からこの＜Ｓ９－１＞の証明を以下に示す。詳細な式変形はとばした。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

＜S9－1＞の証明

下式[1]の左辺から出発する。それに対し、１３年前のこちらの 2012/8/16 の[導出]と類似的な方法を使って変形していき[1]右辺に到達する。途中でゼータの香りの・・（その３０７）でのフーリエ級数を使う（注意：フーリエ級数の表現を使っているが、それらは恒等式である。x に制限を加えているが、じつは x は任意の実数である）。この[1]は二変数の恒等式となっている。

$$\frac{\sin x}{e^{a}+1}+\frac{\sin 2x}{e^{2a}+1}+\frac{\sin 3x}{e^{3a}+1}+\frac{\sin 4x}{e^{4a}+1}+\cdot\cdot=\left(\frac{\sin x}{2}\right)\left(\frac{1}{\mathrm{ch}a-\cos x}-\frac{1}{\mathrm{ch}2a-\cos x}+\frac{1}{\mathrm{ch}3a-\cos x}-\frac{1}{\mathrm{ch}4a-\cos x}+-\cdot\cdot\right)\text{---[1]}$$

$$(a>0,\ x\text{ は任意実数})$$

上式で x を a で置き換え、両辺に sina を掛けて式変形を行い（1-cos2a が右辺の各項に掛かる形にして）次となる。

$$\sin a\left(\frac{\sin a}{e^{a}+1}+\frac{\sin 2a}{e^{2a}+1}+\frac{\sin 3a}{e^{3a}+1}+\frac{\sin 4a}{e^{4a}+1}+\cdot\cdot\right)=\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1-\cos 2a}{\mathrm{ch}a-\cos a}-\frac{1-\cos 2a}{\mathrm{ch}2a-\cos a}+\frac{1-\cos 2a}{\mathrm{ch}3a-\cos a}-\frac{1-\cos 2a}{\mathrm{ch}4a-\cos a}+-\cdot\cdot\right)\text{---[2]}$$

上式に対し、a を 0 に近づけていく（a->0）。右辺はロピタルの定理を２回用いて次のゼータ香り式となる。
（⇒高見沢彗星　その６［(π/2)＆(3π/2)代入］の上側の式と本質的に同じ）

$$\frac{1}{1^2+1}-\frac{1}{2^2+1}+\frac{1}{3^2+1}-\frac{1}{4^2+1}+-\cdot\cdot=\frac{1}{2}-\frac{\pi\,\mathrm{ch}\,\pi}{\mathrm{sh}2\pi}$$

よって a->0 とした上の[2]から、左辺、右辺を逆にして目標の＜Ｓ９－１＞が得られる。
終わり。
＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

＜Ｓ９－１＞はこのようにして得られた。これまでの極限公式と同様に、片方の辺をロピタルの定理を使える形に強引にもっていくことが鍵となる。他の四式も類似の方法で得られる。

最後に、気になる点や想うことなど述べておく。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

●今回の五式を眺めよう。

$$\frac{1}{2}-\frac{\pi\,\mathrm{ch}\,\pi}{\mathrm{sh}2\pi}=\frac{1}{1^2+1}-\frac{1}{2^2+1}+\frac{1}{3^2+1}-\frac{1}{4^2+1}+-\cdot\cdot$$

$$=\lim_{a\to+0}\sin a\left(\frac{\sin a}{e^{a}+1}+\frac{\sin 2a}{e^{2a}+1}+\frac{\sin 3a}{e^{3a}+1}+\frac{\sin 4a}{e^{4a}+1}+\cdot\cdot\right)\qquad\text{----<S9-1>}$$

$$-\frac{1}{2}+\frac{(\pi/2)}{\mathrm{th}\,\pi}=\frac{1}{1^2+1}+\frac{1}{2^2+1}+\frac{1}{3^2+1}+\frac{1}{4^2+1}+\cdot\cdot$$

$$=\lim_{a\to+0}\sin a\left(\frac{\sin a}{e^a-1}+\frac{\sin 2a}{e^{2a}-1}+\frac{\sin 3a}{e^{3a}-1}+\frac{\sin 4a}{e^{4a}-1}+\cdot\cdot\right)$$ ----＜S9－2＞

$$\frac{1}{2}-\frac{\pi\,\mathrm{ch}\,\pi}{\mathrm{sh}2\,\pi}=\frac{1}{1^2+1}-\frac{1}{2^2+1}+\frac{1}{3^2+1}-\frac{1}{4^2+1}+-\cdot\cdot$$

$$=\lim_{a\to+0}2\sin a\left(\frac{\sin a}{e^a+1}+\frac{\sin 3a}{e^{3a}+1}+\frac{\sin 5a}{e^{5a}+1}+\frac{\sin 7a}{e^{7a}+1}+\cdot\cdot\right)$$ ----＜S9－3＞

$$-\frac{1}{2}+\frac{(\pi/2)}{\mathrm{th}\,\pi}=\frac{1}{1^2+1}+\frac{1}{2^2+1}+\frac{1}{3^2+1}+\frac{1}{4^2+1}+\cdot\cdot$$

$$=\lim_{a\to+0}2\sin a\left(\frac{\sin a}{e^a-1}+\frac{\sin 3a}{e^{3a}-1}+\frac{\sin 5a}{e^{5a}-1}+\frac{\sin 7a}{e^{7a}-1}+\cdot\cdot\right)$$ ----＜S9－4＞

$$\frac{1}{1^2+1}-\frac{2}{2^2+1}+\frac{3}{3^2+1}-\frac{4}{4^2+1}+-\cdot\cdot$$

$$=\lim_{a\to+0}2\sin a\left(\frac{\cos a}{e^a+1}+\frac{\cos 3a}{e^{3a}+1}+\frac{\cos 5a}{e^{5a}+1}+\frac{\cos 7a}{e^{7a}+1}+\cdot\cdot\right)$$ ----＜S9－5＞

　これらの右辺に関して、これまでの極限公式では双曲線関数主体だったが、それが三角関数主体のものに変わっていてそれが面白く、味わい深い。左辺のゼータ香り式は、ゼータよりもう一段深いところから来ているものであり、ゼータより広く内容が豊富である。実際＜S9－1＞～＜S9－4＞の最左辺を見ても、ゼータの極限公式よりも深みのある値となっている。

なお、ゼータの香りの漂う公式の一般形は次の形やまたはその変化形だが（高見沢彗星　その６）、a が１の場合が今回の＜S9－2＞のものである。

$$\frac{1}{1^2+a^2}+\frac{1}{2^2+a^2}+\frac{1}{3^2+a^2}+\frac{1}{4^2+a^2}+\cdot\cdot$$

　ところで先に＜Ｓ９－５＞の左辺のみ明示的な値が得られていないことを指摘した。

次のＡのことだが高見沢彗星　その６を見ても出していないし、また岩波公式集にも出ていない。

$$\frac{1}{1^2+1}-\frac{2}{2^2+1}+\frac{3}{3^2+1}-\frac{4}{4^2+1}+-\cdot\cdot$$ ---A

●＜Ｓ９－５＞の左辺（上記のＡ）の明示的な値はなぜ得られていないのか？

$$\frac{1}{1^2+a^2}-\frac{2}{2^2+a^2}+\frac{3}{3^2+a^2}-\frac{4}{4^2+a^2}+-\cdot\cdot$$ ---B

もしこの形の一般形の明示的な表示が得られたら、a を１としてＡの明示値が即座に得られることになる。
しかしＢの形の明示的な値を示す公式は存在しないのかもしれない。というのも、もしＢの明示値を示した公式が得られたら、その両辺が a で微分できて、その結果 a->0 とすることでζ(3)の明示値が得られてしまう！さらにはζ(5)、ζ(7)、ζ(9)・・の奇数ゼータの明示値もどんどん得られる！！という夢のようなことになってしまう。
　しかし、私は（経験的に）そんなことにはならないことを知っているので、よってやはりＢの明示的な値を示す公式は存在しないような気がする。頭の中はまだ茫漠としているが、そのようなことを考えている。

●いまＢを Wolfram Alpha で計算させたら明示的な値として出してこない！ ポリガンマ関数などを複雑に組み合わせた式として出してきた。よっておそらく上記の推論は合っている。
ちなみに、＜Ｓ９－２＞の香り式を Wolfram Alpha で 1～∞まで計算させると、＜Ｓ９－２＞最左辺の値を出してきた。便利なものである！

●半年ほど前から Wolfram Alpha という無料の数学アプリケーションを使っている。ミニ Mathematica という位置づけのものらしい。以前は Excel でマクロを組んで検算していたが、大変時間がかかった。それに比べて Wolfram Alpha は操作がしやすく検算がずっと早くできる。検算にもってこいのアプリである。

●公式などを出した場合、必ず数値検証を行う。それをやらないと不安でならない。現代はさまざまな便利な道具が揃っているから、即座に検算（数値検証）を行うことができる。しかし、コンピュータのない時代、検算をどうしていたのだろう？といつも思う。
　オイラーはどうしていたのか？ガウスはどうやっていたのだろう？アーベルは？ヤコビは？？・・

●「近世数学史談」（高木貞治著、共立出版）に、ガウスの検算を知るヒントが載っているが、ガウスは驚くべき計算をやっていると分かった。彼は幼少のころから計算狂であった。P.44～45

「ガウスが数字的計算に驚くべき才能を有したことは有名で、・・・
・・・
　ガウスに取っては数字的計算は苦痛でなく娯楽であったのである。彼が天文学上の計算に多大の時間を費やすのを見かねて、助手としてダーゼ（Dahse,素数表の計算者）を推薦したものがあったが、ガウスはそれを斥けて『予が従来行った無数の計算に於いて、単なる機械的の計算能力を有するものから有効なる助力を得たろうとは思われる場合はない』と言うている。
・・・
ガウスは必要の認められない場合にも驚くべく多くの数字を羅列しているが、数字の羅列そのものに興味を有するのである。一例をいえばガウスは幼時既に 200 以下の素数及び素数幂の逆数を循環小数に化する表を作成し、後年それを 1000 以下まで継続している。例えば 1/71 を小数に・・

1/71＝0.01408450704225852112676056338028169 014 ・・・

一見すれば退屈なる数字の行列であるが、・・・第８位から先の 07042・・が自動的に出る。無限軌道の上を走るようなものだから、面白くて循環節が終わっても残り惜しいほどに少年ガウスは感じたのではなかろうか。」

こんなふうに高木氏は書いている。ガウスは少年時代から物凄い計算をしていたとわかる。無限軌道の上を走るという表現は面白い。他に、対数表の正確さを確認するのに小数点以下５０桁まで計算していることも紹介されている。

昔の数学者は凄まじい計算をしていたとわかった。具体の面白いことの中に生きていた。現代の面白くもなんともない抽象数学とは大違いで、そこには本物の姿がある。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

2025.2.22 杉岡幹生

＜参考文献＞

・「マグロウヒル　数学公式・数表ハンドブック」(Murray R. Spiegel 著、氏家勝巳訳、オーム社)

・「数学公式Ⅱ」(森口・宇田川・一松、岩波書店)