＜ 三角関数と双曲線関数の融合域（その１８）＞

新たに恒等式を二つ得たので下方に青色式で示す。これまでの主要なものと一緒に示した。紙幅の関係で省いていた＜7−１＞と＜7−２＞を復活させ、その左辺をより簡潔な形に変形した。

ラマヌジャン式の$\Sigma n^s/(e^{2n\pi}-1)$タイプの式のうちsが−1の式やその類似物は、これら恒等式を通じてテータ関数の特殊値から自然に得られるものと分かってきたので、前回分までの式は略した。

＜Ｆ１＞、＜Ｍ１＞、＜Ｎ１＞はよりテータ関数やその類似物を意識した形に同値変形した。

以下では、双曲線関数sinh, cosh, tanhはそれぞれsh, ch, thと略記した。例えば、sh2aはsinh(2a)のことである。aやαは任意の実数であり、よって例えば、$(a\neq 0)$は「aは0でない任意の実数」を意味する。$\tan^{-1}$, th^{-1}はそれぞれarctan, arctanhである。eは自然対数の底。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

＜ 恒等式 ＞

$$\frac{1}{\mathrm{cha}-1}-\frac{1}{\mathrm{sha}}=2\left(\frac{1}{\mathrm{ch2a}-\mathrm{cha}}+\frac{1}{\mathrm{ch4a}-\mathrm{cha}}+\frac{1}{\mathrm{ch6a}-\mathrm{cha}}+\frac{1}{\mathrm{ch8a}-\mathrm{cha}}+\cdot\cdot\right)$$ -----＜1＞

$(a>0)$

$$\frac{1}{\mathrm{sha}}-\frac{1}{\mathrm{cha}+1}=2\left(\frac{1}{\mathrm{ch2a}+\mathrm{cha}}+\frac{1}{\mathrm{ch4a}+\mathrm{cha}}+\frac{1}{\mathrm{ch6a}+\mathrm{cha}}+\frac{1}{\mathrm{ch8a}+\mathrm{cha}}+\cdot\cdot\right)$$ -----＜2＞

$(a>0)$

$$\frac{1}{\mathrm{sh}^2(a/2)}=4\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{ch2a}-\mathrm{cha}}+\frac{\mathrm{ch2a}}{\mathrm{ch4a}-\mathrm{cha}}+\frac{\mathrm{ch3a}}{\mathrm{ch6a}-\mathrm{cha}}+\frac{\mathrm{ch4a}}{\mathrm{ch8a}-\mathrm{cha}}+\cdot\cdot\right)$$ -----＜3＞

$(a\neq 0)$

$$\frac{1}{\mathrm{ch}^2(a/2)}=4\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{ch2a}+\mathrm{cha}}-\frac{\mathrm{ch2a}}{\mathrm{ch4a}+\mathrm{cha}}+\frac{\mathrm{ch3a}}{\mathrm{ch6a}+\mathrm{cha}}-\frac{\mathrm{ch4a}}{\mathrm{ch8a}+\mathrm{cha}}+-\cdot\cdot\right)$$ ----＜4＞

$(a\neq 0)$

$$\frac{1}{\mathrm{sha}}=2\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch2a}-\mathrm{cha}}-\frac{\mathrm{sh2a}}{\mathrm{ch4a}-\mathrm{cha}}+\frac{\mathrm{sh3a}}{\mathrm{ch6a}-\mathrm{cha}}-\frac{\mathrm{sh4a}}{\mathrm{ch8a}-\mathrm{cha}}+-\cdot\cdot\right)$$ -----＜5＞

$(a\neq 0)$

$$\frac{1}{\mathrm{sha}}=2\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch2a+cha}}+\frac{\mathrm{sh2a}}{\mathrm{ch4a+cha}}+\frac{\mathrm{sh3a}}{\mathrm{ch6a+cha}}+\frac{\mathrm{sh4a}}{\mathrm{ch8a+cha}}+\cdot\ \cdot\right)$$ -----<6>

$(a \neq 0)$

$$\frac{1}{e^{a}-1}=\left(\frac{\mathrm{sh2a}}{\mathrm{ch2a-cha}}-1\right)-\left(\frac{\mathrm{sh4a}}{\mathrm{ch4a-cha}}-1\right)+\left(\frac{\mathrm{sh6a}}{\mathrm{ch6a-cha}}-1\right)-\left(\frac{\mathrm{sh8a}}{\mathrm{ch8a-cha}}-1\right)+-\cdot\ \cdot$$ --<7-1>

$(a > 0)$

$$\frac{1}{e^{a}+1}=\left(1-\frac{\mathrm{sh2a}}{\mathrm{ch2a+cha}}\right)-\left(1-\frac{\mathrm{sh4a}}{\mathrm{ch4a+cha}}\right)+\left(1-\frac{\mathrm{sh6a}}{\mathrm{ch6a+cha}}\right)-\left(1-\frac{\mathrm{sh8a}}{\mathrm{ch8a+cha}}\right)+-\cdot\ \cdot$$ --<7-2>

$(a > 0)$

$$\mathrm{th}\left(\frac{a}{2}\right)=\left(\frac{\mathrm{ch2a-cha}}{\mathrm{ch2a+cha}}\right)\times\left(\frac{\mathrm{ch4a+cha}}{\mathrm{ch4a-cha}}\right)\times\left(\frac{\mathrm{ch6a-cha}}{\mathrm{ch6a+cha}}\right)\times\left(\frac{\mathrm{ch8a+cha}}{\mathrm{ch8a-cha}}\right)\times\cdot\ \cdot$$ ----<E1>

$(a > 0)$

$$\mathrm{th}\left(\frac{a}{2}\right)=\left(\frac{\mathrm{sh2a-sha}}{\mathrm{sh2a+sha}}\right)\times\left(\frac{\mathrm{sh4a-sha}}{\mathrm{sh4a+sha}}\right)\times\left(\frac{\mathrm{sh6a-sha}}{\mathrm{sh6a+sha}}\right)\times\left(\frac{\mathrm{sh8a-sha}}{\mathrm{sh8a+sha}}\right)\times\cdot\ \cdot$$ ----<E2>

$(a > 0)$

$$\frac{1}{(e^{a}-1)}+\frac{1}{2(e^{2a}-1)}+\frac{1}{3(e^{3a}-1)}+\frac{1}{4(e^{4a}-1)}+\cdot\ \cdot$$

$$=\log\left(\frac{1}{(1-e^{-a})(1-e^{-2a})(1-e^{-3a})(1-e^{-4a})\cdot\ \cdot}\right)$$ ----<F1>

$(a > 0)$

$$\frac{1}{\mathrm{sh}^2(a/2)}=4\mathrm{sha}\left(\frac{\mathrm{sh2a}}{(\mathrm{ch2a-cha})^2}+\frac{\mathrm{sh4a}}{(\mathrm{ch4a-cha})^2}+\frac{\mathrm{sh6a}}{(\mathrm{ch6a-cha})^2}+\frac{\mathrm{sh8a}}{(\mathrm{ch8a-cha})^2}+\cdot\ \cdot\right)$$ ---<G1>

$(a \neq 0)$

$$\frac{1}{\mathrm{ch}^2(a/2)}=4\mathrm{sha}\left(\frac{\mathrm{sh2a}}{(\mathrm{ch2a+cha})^2}+\frac{\mathrm{sh4a}}{(\mathrm{ch4a+cha})^2}+\frac{\mathrm{sh6a}}{(\mathrm{ch6a+cha})^2}+\frac{\mathrm{sh8a}}{(\mathrm{ch8a+cha})^2}+\cdot\ \cdot\right)$$ ---<G2>

$(a \neq 0)$

$$\frac{1}{e^{a}-1}-\frac{3}{e^{3a}-1}+\frac{5}{e^{5a}-1}-\frac{7}{e^{7a}-1}+-\cdot\cdot=\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}2a+1}+\frac{\mathrm{sh}2a}{\mathrm{ch}4a+1}+\frac{\mathrm{sh}3a}{\mathrm{ch}6a+1}+\frac{\mathrm{sh}4a}{\mathrm{ch}8a+1}+\cdot\cdot$$ --<K1>

$(a>0)$

$$\frac{\alpha}{\mathrm{sh}a}+\frac{\alpha^2}{2\mathrm{sh}2a}+\frac{\alpha^3}{3\mathrm{sh}3a}+\frac{\alpha^4}{4\mathrm{sh}4a}+\cdot\cdot$$

$$=2\log\left(\frac{1}{(1-\alpha e^{-a})(1-\alpha e^{-3a})(1-\alpha e^{-5a})(1-\alpha e^{-7a})\cdot\cdot}\right)$$ ----<M1>

($|\alpha|<e^{a}$ 且つ $a>0$)

$$\frac{1}{\mathrm{sh}a}-\frac{1}{2\mathrm{sh}2a}+\frac{1}{3\mathrm{sh}3a}-\frac{1}{4\mathrm{sh}4a}+-\cdot\cdot$$

$$=2\log\left((1+e^{-a})(1+e^{-3a})(1+e^{-5a})(1+e^{-7a})\cdot\cdot\right)$$ ----<M1−2>

$(a>0)$

$$\frac{\alpha}{\mathrm{sh}a}+\frac{\alpha^3}{3\mathrm{sh}3a}+\frac{\alpha^5}{5\mathrm{sh}5a}+\frac{\alpha^7}{7\mathrm{sh}7a}+\cdot\cdot$$

$$=2\left(\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\alpha}{e^{a}}\right)+\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\alpha}{e^{3a}}\right)+\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\alpha}{e^{5a}}\right)+\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\alpha}{e^{7a}}\right)+\cdot\cdot\right)$$ ----<M2>

($|\alpha|<e^{a}$ 且つ $a>0$)

$$\frac{\alpha}{\mathrm{ch}a}+\frac{\alpha^2}{2\mathrm{ch}2a}+\frac{\alpha^3}{3\mathrm{ch}3a}+\frac{\alpha^4}{4\mathrm{ch}4a}+\cdot\cdot$$

$$=2\log\left(\frac{(1-\alpha e^{-3a})(1-\alpha e^{-7a})(1-\alpha e^{-11a})(1-\alpha e^{-15a})\cdot\cdot}{(1-\alpha e^{-a})(1-\alpha e^{-5a})(1-\alpha e^{-9a})(1-\alpha e^{-13a})\cdot\cdot}\right)$$ ---<N1>

($|\alpha|<e^{a}$ 且つ $a>0$)

$$\frac{\alpha}{\mathrm{ch}a}+\frac{\alpha^3}{3\mathrm{ch}3a}+\frac{\alpha^5}{5\mathrm{ch}5a}+\frac{\alpha^7}{7\mathrm{ch}7a}+\cdot\cdot$$

$$=2\left(\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\alpha}{e^{a}}\right)-\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\alpha}{e^{3a}}\right)+\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\alpha}{e^{5a}}\right)-\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\alpha}{e^{7a}}\right)+-\cdot\cdot\right)$$ ---<N2>

($|\alpha|<e^{a}$ 且つ $a>0$)

$$\frac{1}{\mathrm{th}a}-\frac{1}{2\mathrm{th}2a}+\frac{1}{3\mathrm{th}3a}-\frac{1}{4\mathrm{th}4a}+-\cdot\cdot$$

$$=\log\left\{2\left((1+e^{-2a})(1+e^{-4a})(1+e^{-6a})(1+e^{-8a})\cdot\cdot\right)^2\right\}$$ ---<Q1>

$(a>0)$

$$\frac{\alpha}{e^a+1}+\left(\frac{\alpha^2}{2}\right)\frac{1}{e^{2a}+1}+\left(\frac{\alpha^3}{3}\right)\frac{1}{e^{3a}+1}+\left(\frac{\alpha^4}{4}\right)\frac{1}{e^{4a}+1}+\cdot\cdot$$

$$=\log\left(\frac{(1-\alpha e^{-2a})(1-\alpha e^{-4a})(1-\alpha e^{-6a})(1-\alpha e^{-8a})\cdot\cdot}{(1-\alpha e^{-a})(1-\alpha e^{-3a})(1-\alpha e^{-5a})(1-\alpha e^{-7a})\cdot\cdot}\right)$$ ----<P1>

$(|\alpha|<e^a$ 且つ $a>0)$

$$\frac{1}{e^a+1}-\frac{1}{2(e^{2a}+1)}+\frac{1}{3(e^{3a}+1)}-\frac{1}{4(e^{4a}+1)}+-\cdot\cdot$$

$$=\log\left(\frac{(1+e^{-a})(1+e^{-3a})(1+e^{-5a})(1+e^{-7a})\cdot\cdot}{(1+e^{-2a})(1+e^{-4a})(1+e^{-6a})(1+e^{-8a})\cdot\cdot}\right)$$ ----<P1－2>

$(a>0)$

==================================

　これらの二つの青色式が得られた。

＜Ｐ１＞は２変数恒等式、＜Ｍ１－２＞は１変数恒等式である。＜Ｍ１－２＞は＜Ｍ１＞からα=-1 として簡単に出るが、この式自体興味あるものなので掲載している。

今回、２変数恒等式の形で新たに＜Ｐ１＞を加えた。前回の１変数恒等式＜Ｐ１＞は、そこから（α=-1 で）生まれてくる子供式という形になったので記号を＜Ｐ１－２＞と書き換えた。

さて、佐藤郁郎氏のサイトにテータ関数が並べられている。

可積分系とコマ（その１７） (ikuro-kotaro.sakura.ne.jp)

　テータ関数，｜ｑ｜＜１のとき

　　Θ1＝Π（１＋ｑ^2n)　→　収束

　　Θ2＝Π（１＋ｑ^2n-1)　→　収束

　　Θ3＝Π（１－ｑ^2n-1)　→　収束

　　Θ4＝Π（１－ｑ^2n)　→　収束

　　　Θ1Θ2Θ3Θ4＝Θ4，Θ1Θ2Θ3＝１

それを見ると、＜Ｑ１＞の右辺の

$$(1+e^{-2a})(1+e^{-4a})(1+e^{-6a})(1+e^{-8a})\cdot\cdot$$

は、Θ1 と実質的に同じ！とわかる。

同様に見てみると、冒頭から並べた＜恒等式＞の後半の式の右辺はテータ関数やその類似物の形になっているとわかる。

ところでテータ関数, イータ関数の特殊値を求める ｜ Mathlogサイトにはテータ関数の様々な公式や定理が並べられている。後半の例５の$\prod(1+e^{-2n\pi})=e^{\pi/12}\cdot 2^{-3/8}$ や他の公式を組み合わせたものを使って＜Ｐ１－２＞を変形した式に適用すると、前回示したラマヌジャン式類似物といえる次式が得られる。

$$\frac{1}{e^{\pi}+1}-\frac{1}{2(e^{2\pi}+1)}+\frac{1}{3(e^{3\pi}+1)}-\frac{1}{4(e^{4\pi}+1)}+-\cdot\cdot=-\frac{\pi}{8}+(5/8)\log 2 \quad \text{---<I-3>}$$

また、テータ関数, イータ関数の特殊値を求める ｜ Mathlogのテータ関数公式から、少々の変形で

$\prod(1-e^{-2n\pi})=\pi^{1/4}\cdot e^{\pi/12}/\ (\Gamma(3/4)\cdot\sqrt{2})$ ---①

を得る。

＜Ｆ１＞再掲。

$$\frac{1}{(e^{a}-1)}+\frac{1}{2(e^{2a}-1)}+\frac{1}{3(e^{3a}-1)}+\frac{1}{4(e^{4a}-1)}+\cdot\cdot$$

$$=\log\left(\frac{1}{(1-e^{-a})(1-e^{-2a})(1-e^{-3a})(1-e^{-4a})\cdot\cdot}\right) \quad \text{----<F1>}$$

$(a>0)$

上記①をこの＜Ｆ１＞で a=2π として適用すると、次の有名なラマヌジャン式が出る。

$$\frac{1}{e^{2\pi}-1}+\frac{1}{2\left(e^{4\pi}-1\right)}+\frac{1}{3\left(e^{6\pi}-1\right)}+\frac{1}{4\left(e^{8\pi}-1\right)}+\cdot\cdot=-\frac{\pi}{12}+\left(\frac{1}{2}\right)\log\left(\frac{\pi\sqrt{2}}{\omega}\right) \quad \text{--<ラ1>}$$

ω ：レムニスケート周率、$\omega=(\Gamma(1/4))^2\cdot\pi^{-1/2}\cdot 2^{-3/2}$。

以上のことが冒頭で述べた「ラマヌジャン式の$\sum n^s/(e^{2n\pi}-1)$タイプの式のうち s が-1 の式やその類似物は、これら恒等式を通じてテータ関数の特殊値から自然に得られる・・」の意味である。

最後に、気になる点や想うことなど述べておく。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

● ここまでの流れから

$$(1+e^{-2a})(1+e^{-4a})(1+e^{-6a})(1+e^{-8a})\cdot\cdot$$

とか

$$(1-e^{-2a})(1-e^{-4a})(1-e^{-6a})(1-e^{-8a})\cdot\cdot$$

とかあるいは

$$(1+e^{-a})(1+e^{-3a})(1+e^{-5a})(1+e^{-7a})\cdot\cdot$$

とか、こういう形の式（関数）がたいへん重要である！ことが分かってきた。

● その$(1-e^{-2a})(1-e^{-4a})(1-e^{-6a})(1-e^{-8a})$・・つまり$(1-x)(1-x^2)(1-x^3)$・・の形に史上最も早く着目したのはおそらくガウスである。

「近世数学史談」（高木貞治著、共立出版）を読んでそう確信した。

ガウスのことを書いた「9.書かれなかった楕円函数論」の中に次のようにある。P.55

「～それらを求和函数（略）と名付けたがそれよりも、先ず

$F(x)=(1-x)(1-x^2)(1-x^3)$・・」

とおいた。まず第一にこれが面白い函数であったのであろう。実際そこから modular function が生まれたのである。」

と高木氏は書いている。

ガウスは、アーベルやヤコビよりも数十年早くに楕円関数論を構築しておきながら結局未発表に終わったのであるが、時代を超越した地点に達していて、modular function までも掴んでいたことがわかる。

F(x)は、テータ関数Θ4＝Π（１－q^2n）そのものである。

● ＜Ｍ２＞、＜Ｎ２＞の右辺もテータ関数(類似物)の形に書き換えられるが、まだできていない。

$$\frac{\alpha}{\mathrm{sha}}+\frac{\alpha^3}{3\mathrm{sh}3a}+\frac{\alpha^5}{5\mathrm{sh}5a}+\frac{\alpha^7}{7\mathrm{sh}7a}+\cdot\cdot$$

$$=2\left(\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\alpha}{e^{a}}\right)+\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\alpha}{e^{3a}}\right)+\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\alpha}{e^{5a}}\right)+\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\alpha}{e^{7a}}\right)+\cdot\cdot\right)$$ ----<M2>

$(|\alpha|<e^a$ 且つ $a>0)$

$$\frac{\alpha}{\mathrm{cha}}+\frac{\alpha^3}{3\mathrm{ch}3a}+\frac{\alpha^5}{5\mathrm{ch}5a}+\frac{\alpha^7}{7\mathrm{ch}7a}+\cdot\cdot$$

$$=2\left(\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\alpha}{e^{a}}\right)-\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\alpha}{e^{3a}}\right)+\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\alpha}{e^{5a}}\right)-\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\alpha}{e^{7a}}\right)+-\cdot\cdot\right)$$ ---<N2>

$(|\alpha|<e^a$ 且つ $a>0)$

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

2024.11.11 杉岡幹生

＜参考文献＞

・ラマヌジャン書簡集（B.C.バーント/R.A.ランキン編著,細川尋史訳,シュプリンガー・フェアラーク東京）

・可積分系とコマ（その１７） (ikuro-kotaro.sakura.ne.jp)

・テータ関数,イータ関数の特殊値を求める | Mathlog

・ラマヌジャン公式集