＜ 三角関数と双曲線関数の融合域（その１５）＞ rev1.01

　新種と考えられる公式を四つ得たので下方に青色式で示す。これまでの主要なものと一緒に示した。極限公式は、恒等式ではないので＜公式＞とした。
　なお、紙幅節約の面から、前回の＜ゼータの香りの漂う・・（その３４１）＞から同値関係の片方のものや、形がいまーつのものを省いた（＜J＞や＜Ｋ２＞）。また Ki 氏が示された $\tan^{-1}$ の加法定理を用いる方法で、＜Ｂ＞、＜Ｄ＞、Ａ１，Ａ２はかなり自明に近いとわかったので削除した。

　以下では、双曲線関数 sinh, cosh, tanh はそれぞれ sh, ch, th と略記した。例えば、sh2a は sinh(2a)のことである。a や b や α は任意の実数であり、よって例えば、$(a \neq 0)$は「a は 0 でない任意の実数」を意味する。$\tan^{-1}$, th^{-1} は、それぞれ arctan, arctanh である。e は自然対数の底。

＝＝

＜ 恒等式 ＞

$$\frac{1}{\mathrm{cha}-1}-\frac{1}{\mathrm{sha}}=2\left(\frac{1}{\mathrm{ch2a}-\mathrm{cha}}+\frac{1}{\mathrm{ch4a}-\mathrm{cha}}+\frac{1}{\mathrm{ch6a}-\mathrm{cha}}+\frac{1}{\mathrm{ch8a}-\mathrm{cha}}+\cdot\cdot\right) \quad \text{------＜1＞}$$

$(a>0)$

$$\frac{1}{\mathrm{sha}}-\frac{1}{\mathrm{cha}+1}=2\left(\frac{1}{\mathrm{ch2a}+\mathrm{cha}}+\frac{1}{\mathrm{ch4a}+\mathrm{cha}}+\frac{1}{\mathrm{ch6a}+\mathrm{cha}}+\frac{1}{\mathrm{ch8a}+\mathrm{cha}}+\cdot\cdot\right) \quad \text{-----＜2＞}$$

$(a>0)$

$$\frac{1}{\mathrm{sh}^2(a/2)}=4\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{ch2a}-\mathrm{cha}}+\frac{\mathrm{ch2a}}{\mathrm{ch4a}-\mathrm{cha}}+\frac{\mathrm{ch3a}}{\mathrm{ch6a}-\mathrm{cha}}+\frac{\mathrm{ch4a}}{\mathrm{ch8a}-\mathrm{cha}}+\cdot\cdot\right) \quad \text{-----＜3＞}$$

$(a \neq 0)$

$$\frac{1}{\mathrm{ch}^2(a/2)}=4\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{ch2a}+\mathrm{cha}}-\frac{\mathrm{ch2a}}{\mathrm{ch4a}+\mathrm{cha}}+\frac{\mathrm{ch3a}}{\mathrm{ch6a}+\mathrm{cha}}-\frac{\mathrm{ch4a}}{\mathrm{ch8a}+\mathrm{cha}}+-\cdot\cdot\right) \quad \text{----＜4＞}$$

$(a \neq 0)$

$$\frac{1}{\mathrm{sha}}=2\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch2a}-\mathrm{cha}}-\frac{\mathrm{sh2a}}{\mathrm{ch4a}-\mathrm{cha}}+\frac{\mathrm{sh3a}}{\mathrm{ch6a}-\mathrm{cha}}-\frac{\mathrm{sh4a}}{\mathrm{ch8a}-\mathrm{cha}}+-\cdot\cdot\right) \quad \text{-----＜5＞}$$

$(a \neq 0)$

$$\frac{1}{\mathrm{sha}}=2\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch2a+cha}}+\frac{\mathrm{sh2a}}{\mathrm{ch4a+cha}}+\frac{\mathrm{sh3a}}{\mathrm{ch6a+cha}}+\frac{\mathrm{sh4a}}{\mathrm{ch8a+cha}}+\cdot\cdot\right) \qquad \text{-----<6>}$$

$$(a \neq 0)$$

$$\frac{\mathrm{ch}\left(\frac{a}{2}\right)}{2\mathrm{sh}\left(\frac{a}{2}\right)}-\frac{1}{2}=\left(\frac{\mathrm{sh2a}}{\mathrm{ch2a-cha}}-1\right)-\left(\frac{\mathrm{sh4a}}{\mathrm{ch4a-cha}}-1\right)+\left(\frac{\mathrm{sh6a}}{\mathrm{ch6a-cha}}-1\right)-\left(\frac{\mathrm{sh8a}}{\mathrm{ch8a-cha}}-1\right)+-\cdot\cdot \text{-<7-1>}$$

$$(a > 0)$$

$$\frac{1}{2}-\frac{\mathrm{sh}\left(\frac{a}{2}\right)}{2\mathrm{ch}\left(\frac{a}{2}\right)}=\left(1-\frac{\mathrm{sh2a}}{\mathrm{ch2a+cha}}\right)-\left(1-\frac{\mathrm{sh4a}}{\mathrm{ch4a+cha}}\right)+\left(1-\frac{\mathrm{sh6a}}{\mathrm{ch6a+cha}}\right)-\left(1-\frac{\mathrm{sh8a}}{\mathrm{ch8a+cha}}\right)+-\cdot\cdot \text{-<7-2>}$$

$$(a > 0)$$

$$\mathrm{th}\left(\frac{a}{2}\right)=\left(\frac{\mathrm{ch2a-cha}}{\mathrm{ch2a+cha}}\right)\times\left(\frac{\mathrm{ch4a+cha}}{\mathrm{ch4a-cha}}\right)\times\left(\frac{\mathrm{ch6a-cha}}{\mathrm{ch6a+cha}}\right)\times\left(\frac{\mathrm{ch8a+cha}}{\mathrm{ch8a-cha}}\right)\times\cdot\cdot \qquad \text{----<E1>}$$

$$(a > 0)$$

$$\mathrm{th}\left(\frac{a}{2}\right)=\left(\frac{\mathrm{sh2a-sha}}{\mathrm{sh2a+sha}}\right)\times\left(\frac{\mathrm{sh4a-sha}}{\mathrm{sh4a+sha}}\right)\times\left(\frac{\mathrm{sh6a-sha}}{\mathrm{sh6a+sha}}\right)\times\left(\frac{\mathrm{sh8a-sha}}{\mathrm{sh8a+sha}}\right)\times\cdot\cdot \qquad \text{----<E2>}$$

$$(a > 0)$$

$$\frac{1}{(e^{a}-1)}+\frac{1}{2(e^{2a}-1)}+\frac{1}{3(e^{3a}-1)}+\frac{1}{4(e^{4a}-1)}+\cdot\cdot$$

$$=\log\left(\frac{1}{(1-e^{-a})}\times\frac{1}{(1-e^{-2a})}\times\frac{1}{(1-e^{-3a})}\times\frac{1}{(1-e^{-4a})}\times\cdot\cdot\right) \qquad \text{----<F1>}$$

$$(a > 0)$$

$$\frac{1}{\mathrm{sh}^2(a/2)}=4\mathrm{sha}\left(\frac{\mathrm{sh2a}}{(\mathrm{ch2a-cha})^2}+\frac{\mathrm{sh4a}}{(\mathrm{ch4a-cha})^2}+\frac{\mathrm{sh6a}}{(\mathrm{ch6a-cha})^2}+\frac{\mathrm{sh8a}}{(\mathrm{ch8a-cha})^2}+\cdot\cdot\right) \quad \text{---<G1>}$$

$$(a \neq 0)$$

$$\frac{1}{\mathrm{ch}^2(a/2)}=4\mathrm{sha}\left(\frac{\mathrm{sh2a}}{(\mathrm{ch2a+cha})^2}+\frac{\mathrm{sh4a}}{(\mathrm{ch4a+cha})^2}+\frac{\mathrm{sh6a}}{(\mathrm{ch6a+cha})^2}+\frac{\mathrm{sh8a}}{(\mathrm{ch8a+cha})^2}+\cdot\cdot\right) \quad \text{---<G2>}$$

$$(a \neq 0)$$

$$\frac{1}{e^{a}-1}-\frac{3}{e^{3a}-1}+\frac{5}{e^{5a}-1}-\frac{7}{e^{7a}-1}+-\cdot\cdot=\frac{sha}{ch2a+1}+\frac{sh2a}{ch4a+1}+\frac{sh3a}{ch6a+1}+\frac{sh4a}{ch8a+1}+\cdot\cdot$$ --<K1>

$(a>0)$

$$\tan^{-1}\left(\frac{chb}{sha}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{chb}{sh3a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{chb}{sh5a}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{chb}{sh7a}\right)+-\cdot\cdot$$
$$=\frac{chb}{1cha}-\frac{ch3b}{3ch3a}+\frac{ch5b}{5ch5a}-\frac{ch7b}{7ch7a}+-\cdot\cdot$$ ---<L1>

$(\,|b|\leqq a$ 且つ $a\neq 0\,)$

$$\tan^{-1}\left(\frac{shb}{cha}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{shb}{ch3a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{shb}{ch5a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{shb}{ch7a}\right)+\cdot\cdot$$
$$=\frac{shb}{1sha}-\frac{sh3b}{3sh3a}+\frac{sh5b}{5sh5a}-\frac{sh7b}{7sh7a}+-\cdot\cdot$$ ---<L2>

$(\,|b|\leqq a$ 且つ $a\neq 0\,)$

$$\frac{\alpha}{sha}+\frac{\alpha^2}{2sh2a}+\frac{\alpha^3}{3sh3a}+\frac{\alpha^4}{4sh4a}+\cdot\cdot$$
$$=2\log\left(\frac{1}{(1-\alpha e^{-a})}\times\frac{1}{(1-\alpha e^{-3a})}\times\frac{1}{(1-\alpha e^{-5a})}\times\frac{1}{(1-\alpha e^{-7a})}\times\cdot\cdot\right)$$ ----<M1>

$(\,|\alpha|<e^{a}$ 且つ $a>0\,)$

$$\frac{\alpha}{sha}+\frac{\alpha^3}{3sh3a}+\frac{\alpha^5}{5sh5a}+\frac{\alpha^7}{7sh7a}+\cdot\cdot$$
$$=2\left(th^{-1}\left(\frac{\alpha}{e^{a}}\right)+th^{-1}\left(\frac{\alpha}{e^{3a}}\right)+th^{-1}\left(\frac{\alpha}{e^{5a}}\right)+th^{-1}\left(\frac{\alpha}{e^{7a}}\right)+\cdot\cdot\right)$$ ----<M2>

$(\,|\alpha|<e^{a}$ 且つ $a>0\,)$

$$\frac{\alpha}{sha}-\frac{\alpha^3}{3sh3a}+\frac{\alpha^5}{5sh5a}-\frac{\alpha^7}{7sh7a}+-\cdot\cdot$$
$$=2\left(\tan^{-1}\left(\frac{\alpha}{e^{a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\alpha}{e^{3a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\alpha}{e^{5a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\alpha}{e^{7a}}\right)+\cdot\cdot\right)$$ ---<M3>

$(\,|\alpha|<e^{a}$ 且つ $a>0\,)$

$$\frac{\alpha}{\mathrm{ch}a}+\frac{\alpha^2}{2\mathrm{ch}2a}+\frac{\alpha^3}{3\mathrm{ch}3a}+\frac{\alpha^4}{4\mathrm{ch}4a}+\cdot\cdot$$

$$=2\left(\log\frac{1}{1-\alpha e^{-a}}-\log\frac{1}{1-\alpha e^{-3a}}+\log\frac{1}{1-\alpha e^{-5a}}-\log\frac{1}{1-\alpha e^{-7a}}+-\cdot\cdot\right) \quad \text{---<N1>}$$

$(\,|\alpha|<e^a$ 且つ $a>0\,)$

$$\frac{\alpha}{\mathrm{ch}a}+\frac{\alpha^3}{3\mathrm{ch}3a}+\frac{\alpha^5}{5\mathrm{ch}5a}+\frac{\alpha^7}{7\mathrm{ch}7a}+\cdot\cdot$$

$$=2\left(\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\alpha}{e^a}\right)-\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\alpha}{e^{3a}}\right)+\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\alpha}{e^{5a}}\right)-\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\alpha}{e^{7a}}\right)+-\cdot\cdot\right) \quad \text{---<N2>}$$

$(\,|\alpha|<e^a$ 且つ $a>0\,)$

$$\frac{\alpha}{\mathrm{ch}a}-\frac{\alpha^3}{3\mathrm{ch}3a}+\frac{\alpha^5}{5\mathrm{ch}5a}-\frac{\alpha^7}{7\mathrm{ch}7a}+-\cdot\cdot$$

$$=2\left(\tan^{-1}\left(\frac{\alpha}{e^a}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{\alpha}{e^{3a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\alpha}{e^{5a}}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{\alpha}{e^{7a}}\right)+-\cdot\cdot\right) \quad \text{---<N3>}$$

$(\,|\alpha|<e^a$ 且つ $a>0\,)$

＜ 公式 ＞

◆√2 極限公式

$$\sqrt{2}=\lim_{a\to 0}\,(1+e^{-a})\times\frac{1}{(1+e^{-3a})}\times(1+e^{-5a})\times\frac{1}{(1+e^{-7a})}\times\cdot\cdot \quad \text{----<N1-2>}$$

$(a>0)$

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

今回、最後の四つの青色式が得られた。＜Ｎ１＞～＜Ｎ３＞は、任意の二変数（条件付き）で成り立つので二変数恒等式となっている。なお、これら四式は Excel での数値検証でも正しいことを確認している。

＜Ｎ１＞の導出は、前回の＜ゼータの香りの漂う・・（その３４１）＞の＜Ｍ１＞の証明の類似の方法で出る。また前回同様、＜Ｎ２＞は＜Ｎ１＞から導かれ、＜Ｎ３＞は＜Ｎ２＞から出る。

＜Ｎ１＞～＜Ｎ３＞と＜Ｍ１＞～＜Ｍ３＞は、シンメトリーを成している感があり、鏡に映したもの同士といった趣きである。

＜Ｎ１＞と＜Ｎ１−２＞を並べよう。

$$\frac{\alpha}{\mathrm{ch}a}+\frac{\alpha^2}{2\mathrm{ch}2a}+\frac{\alpha^3}{3\mathrm{ch}3a}+\frac{\alpha^4}{4\mathrm{ch}4a}+\cdot\cdot$$

$$=2\left(\log\frac{1}{1-\alpha e^{-a}}-\log\frac{1}{1-\alpha e^{-3a}}+\log\frac{1}{1-\alpha e^{-5a}}-\log\frac{1}{1-\alpha e^{-7a}}+-\cdot\cdot\right) \quad \text{---<N1>}$$

$(\,|\alpha|<e^a$ 且つ $a>0\,)$

$$\sqrt{2}=\lim_{a\to 0}(1+e^{-a})\times\frac{1}{(1+e^{-3a})}\times(1+e^{-5a})\times\frac{1}{(1+e^{-7a})}\times\cdot\cdot \qquad ----<N1-2>$$

$$(a>0)$$

この＜Ｎ１−２＞は、＜Ｎ１＞でαに-1 を代入して a を正で a->0 とすれば簡単に出る。

＜Ｎ１−２＞は、√2 の極限公式とでもいうべき式であり、そのまま“√2 極限公式”と名付けた。簡明で美しい式である！ 公式集になく見たことがないので新種かと思われる。右辺は一つおきに逆数のものが掛かっていく。$1+e^{-na}$ や $1/(1+e^{-na})$ が無限に掛け算されて a を正で 0 に近づけると√2 になるというのは、まったくふしぎである。

最後に、気になる点や想うことなど述べておく。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

●今回の式たちも、三角関数と双曲線関数の融合域の三変数域から出たものである。前回述べたように、三変数域は二変数域よりも深いところにありわかりにくく、最初は失敗を繰り返した。「実験」を重ねるうちに少しずつわかってきて、三変数域でも公式が出始めたという感じである。

●今回の極限公式は、導出過程を振り返って、２５０年前に得られていてもふしぎでない式に思える。
その導出過程はやや長いが、高校数学程度しか使っていない。簡単な道具でこういう式が得られるというのがとてもよい。若い頃は、超絶技巧を使わないとよいものは出ないのでは？と思っていたが、間違いであった。

●今回の極限公式は、二つの無限が重なっていることに注意したい。無限に項を掛ける無限と、無限に a を（正で）0 に近づけるという二つの無限である。

$$\sqrt{2}=\lim_{a\to 0}(1+e^{-a})\times\frac{1}{(1+e^{-3a})}\times(1+e^{-5a})\times\frac{1}{(1+e^{-7a})}\times\cdot\cdot \qquad ----<N1-2>$$

$$(a>0)$$

●高瀬正仁氏の数学史ブログから。
１９５５年、日光での（整数論）国際会議でのヴェイユと SSS グループ（谷山豊ら）との会話が記録されている。 http://reuler.blog108.fc2.com/blog-category-39-2.html
ヴェイユは２０世紀数学の中心人物の一人であるが、よく喋り、奇行に満ちた人であったとわかる。どこか（もう一人の奇人？）グロタンディークに似ている。 数学の世界は、このようなエネルギーに満ちた人に引っ張られていっているように見える。
＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

2024.10.12 杉岡幹生

＜参考文献＞

・「マグロウヒル　数学公式・数表ハンドブック」（Murray R. Spiegel 著、氏家勝巳訳、オーム社）
・「数学公式Ｉ」「数学公式Ⅱ」（森口・宇田川・一松、岩波書店）

改訂 rev1.01 2024.10.20　 書き損じを訂正　五式⇒四式