＜ 三角関数と双曲線関数の融合域（その１２）＞ rev.1.01

　二変数の恒等式を得たので下方に青色式で示す。これまでの主要なものと一緒に示した。その青色式から即座に得られるＡ１とＡ２は、＜ゼータの香りの・・（その３１２）＞で既に報告したものだが、親子関係があるので下方で並べた。

　以下では、双曲線関数 sinh, cosh, tanh はそれぞれ sh, ch, th と略記した。例えば、sh2a は sinh(2a)のことである。a は任意の実数であり、よって例えば、$(a\neq 0)$は「a は 0 でない任意の実数」を意味する。$\tan^{-1}$ は arctan である。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

＜ 恒等式 ＞

$$\frac{1}{\mathrm{cha}-1}-\frac{1}{\mathrm{sha}}=2\left(\frac{1}{\mathrm{ch2a}-\mathrm{cha}}+\frac{1}{\mathrm{ch4a}-\mathrm{cha}}+\frac{1}{\mathrm{ch6a}-\mathrm{cha}}+\frac{1}{\mathrm{ch8a}-\mathrm{cha}}+\cdot\cdot\right)\quad \text{-----}\langle 1\rangle$$

$$(a>0)$$

$$\frac{1}{\mathrm{sha}}-\frac{1}{\mathrm{cha}+1}=2\left(\frac{1}{\mathrm{ch2a}+\mathrm{cha}}+\frac{1}{\mathrm{ch4a}+\mathrm{cha}}+\frac{1}{\mathrm{ch6a}+\mathrm{cha}}+\frac{1}{\mathrm{ch8a}+\mathrm{cha}}+\cdot\cdot\right)\quad \text{-----}\langle 2\rangle$$

$$(a>0)$$

$$\frac{1}{\mathrm{sh}^2(a/2)}=4\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{ch2a}-\mathrm{cha}}+\frac{\mathrm{ch2a}}{\mathrm{ch4a}-\mathrm{cha}}+\frac{\mathrm{ch3a}}{\mathrm{ch6a}-\mathrm{cha}}+\frac{\mathrm{ch4a}}{\mathrm{ch8a}-\mathrm{cha}}+\cdot\cdot\right)\quad \text{-----}\langle 3\rangle$$

$$(a\neq 0)$$

$$\frac{1}{\mathrm{ch}^2(a/2)}=4\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{ch2a}+\mathrm{cha}}-\frac{\mathrm{ch2a}}{\mathrm{ch4a}+\mathrm{cha}}+\frac{\mathrm{ch3a}}{\mathrm{ch6a}+\mathrm{cha}}-\frac{\mathrm{ch4a}}{\mathrm{ch8a}+\mathrm{cha}}+-\cdot\cdot\right)\quad \text{----}\langle 4\rangle$$

$$(a\neq 0)$$

$$\frac{1}{\mathrm{sha}}=2\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch2a}-\mathrm{cha}}-\frac{\mathrm{sh2a}}{\mathrm{ch4a}-\mathrm{cha}}+\frac{\mathrm{sh3a}}{\mathrm{ch6a}-\mathrm{cha}}-\frac{\mathrm{sh4a}}{\mathrm{ch8a}-\mathrm{cha}}+-\cdot\cdot\right)\quad \text{-----}\langle 5\rangle$$

$$(a\neq 0)$$

$$\frac{1}{\mathrm{sha}}=2\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch2a}+\mathrm{cha}}+\frac{\mathrm{sh2a}}{\mathrm{ch4a}+\mathrm{cha}}+\frac{\mathrm{sh3a}}{\mathrm{ch6a}+\mathrm{cha}}+\frac{\mathrm{sh4a}}{\mathrm{ch8a}+\mathrm{cha}}+\cdot\cdot\right)\quad \text{-----}\langle 6\rangle$$

$$(a\neq 0)$$

$$\frac{\mathrm{ch}\left(\frac{a}{2}\right)}{2\mathrm{sh}\left(\frac{a}{2}\right)}-\frac{1}{2}$$

$$=\left(\frac{\mathrm{sh}2a}{\mathrm{ch}2a-\mathrm{cha}}-1\right)-\left(\frac{\mathrm{sh}4a}{\mathrm{ch}4a-\mathrm{cha}}-1\right)+\left(\frac{\mathrm{sh}6a}{\mathrm{ch}6a-\mathrm{cha}}-1\right)-\left(\frac{\mathrm{sh}8a}{\mathrm{ch}8a-\mathrm{cha}}-1\right)+-\cdot\cdot \quad \text{--<7-1>}$$

$$(a>0)$$

$$\frac{1}{2}-\frac{\mathrm{sh}\left(\frac{a}{2}\right)}{2\mathrm{ch}\left(\frac{a}{2}\right)}$$

$$=\left(1-\frac{\mathrm{sh}2a}{\mathrm{ch}2a+\mathrm{cha}}\right)-\left(1-\frac{\mathrm{sh}4a}{\mathrm{ch}4a+\mathrm{cha}}\right)+\left(1-\frac{\mathrm{sh}6a}{\mathrm{ch}6a+\mathrm{cha}}\right)-\left(1-\frac{\mathrm{sh}8a}{\mathrm{ch}8a+\mathrm{cha}}\right)+-\cdot\cdot \quad \text{--<7-2>}$$

$$(a>0)$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)\tan^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{sha}}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{sh}2a}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{sh}4a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{sh}6a}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{sh}8a}\right)+-\cdot\cdot \text{--<B>}$$

$$(a\neq 0)$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)\tan^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{sha}}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch}2a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch}4a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch}6a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch}8a}\right)+\cdot\cdot \text{---<D>}$$

$$(a\neq 0)$$

$$\mathrm{th}\left(\frac{a}{2}\right)=\left(\frac{\mathrm{ch}2a-\mathrm{cha}}{\mathrm{ch}2a+\mathrm{cha}}\right)\times\left(\frac{\mathrm{ch}4a+\mathrm{cha}}{\mathrm{ch}4a-\mathrm{cha}}\right)\times\left(\frac{\mathrm{ch}6a-\mathrm{cha}}{\mathrm{ch}6a+\mathrm{cha}}\right)\times\left(\frac{\mathrm{ch}8a+\mathrm{cha}}{\mathrm{ch}8a-\mathrm{cha}}\right)\times\cdot\cdot \quad \text{----<E1>}$$

$$(a>0)$$

$$\mathrm{th}\left(\frac{a}{2}\right)=\left(\frac{\mathrm{sh}2a-\mathrm{sha}}{\mathrm{sh}2a+\mathrm{sha}}\right)\times\left(\frac{\mathrm{sh}4a-\mathrm{sha}}{\mathrm{sh}4a+\mathrm{sha}}\right)\times\left(\frac{\mathrm{sh}6a-\mathrm{sha}}{\mathrm{sh}6a+\mathrm{sha}}\right)\times\left(\frac{\mathrm{sh}8a-\mathrm{sha}}{\mathrm{sh}8a+\mathrm{sha}}\right)\times\cdot\cdot \quad \text{----<E2>}$$

$$(a>0)$$

$$\frac{1}{(e^{a}-1)}+\frac{1}{2(e^{2a}-1)}+\frac{1}{3(e^{3a}-1)}+\frac{1}{4(e^{4a}-1)}+\cdot\cdot$$

$$=\log\left(\frac{1}{(1-e^{-a})}\times\frac{1}{(1-e^{-2a})}\times\frac{1}{(1-e^{-3a})}\times\frac{1}{(1-e^{-4a})}\times\cdot\cdot\right) \quad \text{----<F1>}$$

$$(a>0)$$

$$\frac{1}{sh^2(a/2)}=4sha\left(\frac{sh2a}{(ch2a-cha)^2}+\frac{sh4a}{(ch4a-cha)^2}+\frac{sh6a}{(ch6a-cha)^2}+\frac{sh8a}{(ch8a-cha)^2}+\cdot\cdot\right) \quad \text{---<G1>}$$

$(a \neq 0)$

$$\frac{1}{ch^2(a/2)}=4sha\left(\frac{sh2a}{(ch2a+cha)^2}+\frac{sh4a}{(ch4a+cha)^2}+\frac{sh6a}{(ch6a+cha)^2}+\frac{sh8a}{(ch8a+cha)^2}+\cdot\cdot\right) \quad \text{---<G2>}$$

$(a \neq 0)$

$$tha=\left(\frac{ch3a}{cha}\cdot\frac{th2a-tha}{th2a+tha}\right)\times\left(\frac{ch5a}{ch3a}\cdot\frac{th4a-tha}{th4a+tha}\right)\times\left(\frac{ch7a}{ch5a}\cdot\frac{th6a-tha}{th6a+tha}\right)\times\left(\frac{ch9a}{ch7a}\cdot\frac{th8a-tha}{th8a+tha}\right)\times\cdot\cdot \quad \text{--<J>}$$

$(a > 0)$

$$\frac{1}{e^a-1}-\frac{3}{e^{3a}-1}+\frac{5}{e^{5a}-1}-\frac{7}{e^{7a}-1}+-\cdot\cdot=\frac{sha}{ch2a+1}+\frac{sh2a}{ch4a+1}+\frac{sh3a}{ch6a+1}+\frac{sh4a}{ch8a+1}+\cdot\cdot \quad \text{--<K1>}$$

$(a > 0)$

$$\frac{1}{1-x}-\frac{3x^2}{1-x^3}+\frac{5x^4}{1-x^5}-\frac{7x^6}{1-x^7}+-\cdot\cdot$$
$$=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}+\frac{x(1-x^4)}{(1+x^4)^2}+\frac{x^2(1-x^6)}{(1+x^6)^2}+\frac{x^3(1-x^8)}{(1+x^8)^2}+\cdot\cdot \quad \text{---<K2>}$$

$(|x|<1)$

<K1>と<K2>は同値

$$\tan^{-1}\left(\frac{chb}{sha}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{chb}{sh3a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{chb}{sh5a}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{chb}{sh7a}\right)+-\cdot\cdot$$
$$=\frac{chb}{1cha}-\frac{ch3b}{3ch3a}+\frac{ch5b}{5ch5a}-\frac{ch7b}{7ch7a}+-\cdot\cdot \quad \text{---<L1>}$$

$(0 \leqq |b| \leqq a$ 且つ $a \neq 0)$

$$\tan^{-1}\left(\frac{shb}{cha}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{shb}{ch3a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{shb}{ch5a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{shb}{ch7a}\right)+\cdot\cdot$$
$$=\frac{shb}{1sha}-\frac{sh3b}{3sh3a}+\frac{sh5b}{5sh5a}-\frac{sh7b}{7sh7a}+-\cdot\cdot \quad \text{---<L2>}$$

$(0 \leqq |b| \leqq a$ 且つ $a \neq 0)$

［下記Ａ１は＜Ｌ１＞での a=b の特殊ケース］

$$\frac{\pi}{4}=\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{sha}}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{sh3a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{sh5a}}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{sh7a}}\right)+-\cdot\cdot \quad \text{---Ａ１}$$

$(\mathrm{a}\ \text{は}\ 0\ \text{より大きい任意の実数})$

［下記Ａ２は＜Ｌ２＞での a=b の特殊ケース］

$$\frac{\pi}{4}=\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{cha}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch3a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch5a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch7a}}\right)+\cdot\cdot \quad \text{---Ａ２}$$

$(\mathrm{a}\ \text{は}\ 0\ \text{より大きい任意の実数})$

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

今回この青色の二式＜Ｌ１＞と＜Ｌ２＞が得られた。両者は任意の二変数（条件付き）で成り立つので、二変数恒等式となっている。なお、式は、Excel での数値検証でも正しいことを確認している。

＜Ｌ１＞で b=a とすると、次のようにＡ１が出る。よって、Ａ１は＜Ｌ１＞の特殊ケースである。

$$\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{sha}}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{sh3a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{sh5a}}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{sh7a}}\right)+-\cdot\cdot$$

$$=\frac{\mathrm{cha}}{1\mathrm{cha}}-\frac{\mathrm{ch3a}}{3\mathrm{ch3a}}+\frac{\mathrm{ch5a}}{5\mathrm{ch5a}}-\frac{\mathrm{ch7a}}{7\mathrm{ch7a}}+-\cdot\cdot$$

$$=\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+-\cdot\cdot$$

$$=\frac{\pi}{4}$$

＜Ｌ１＞と＜Ｌ２＞の導出方法（証明）は、半年以上前の＜ゼータの香りの・・（その３１２）＞でＡ１、Ａ２を得たときに、その導出過程で実質的に得ていたことに改めて気づいた。よって証明はそちらを参考にしていただきたい。

そのときは、＜Ｌ１＞と＜Ｌ２＞が見えていたのに、Ａ１、Ａ２の美しさに目がくらんで、通り過ぎたという感じである。しかし価値という点では、当然ながら＜Ｌ１＞, ＜Ｌ２＞の方がＡ１，Ａ２より上である。

最後に、気になる点や想うことなど述べておく。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

●今回の二式を眺めたい。

$$\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{chb}}{\mathrm{sha}}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{chb}}{\mathrm{sh3a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{chb}}{\mathrm{sh5a}}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{chb}}{\mathrm{sh7a}}\right)+-\cdot\cdot$$

$$=\frac{\mathrm{chb}}{1\mathrm{cha}}-\frac{\mathrm{ch3b}}{3\mathrm{ch3a}}+\frac{\mathrm{ch5b}}{5\mathrm{ch5a}}-\frac{\mathrm{ch7b}}{7\mathrm{ch7a}}+-\cdot\cdot \quad \text{---<L1>}$$

$(0\leqq|\mathrm{b}|\leqq \mathrm{a}\ \text{且つ}\ \mathrm{a}\neq 0)$

$$\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{shb}}{\mathrm{cha}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{shb}}{\mathrm{ch3a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{shb}}{\mathrm{ch5a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{shb}}{\mathrm{ch7a}}\right)+\cdot\cdot$$

$$=\frac{\mathrm{shb}}{1\mathrm{sha}}-\frac{\mathrm{sh3b}}{3\mathrm{sh3a}}+\frac{\mathrm{sh5b}}{5\mathrm{sh5a}}-\frac{\mathrm{sh7b}}{7\mathrm{sh7a}}+-\cdot\cdot \quad \text{---}\langle \mathrm{L2}\rangle$$

$(0\leqq |b| \leqq a$ 且つ $a\neq 0)$

これらは単体で見てもすばらしいが、ペアで見ると、そのシンメトリー（対称性）の美しさに感嘆する。ふしぎな形をしていて見ていて飽きない。

●Ａ１とＡ２を並べたい。

$$\frac{\pi}{4}=\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{sha}}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{sh3a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{sh5a}}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{sh7a}}\right)+-\cdot\cdot \quad \text{---Ａ１}$$

(a は 0 より大きい任意の実数)

$$\frac{\pi}{4}=\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{cha}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch3a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch5a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch7a}}\right)+\cdot\cdot \quad \text{---Ａ２}$$

(a は 0 より大きい任意の実数)

これらを見ると

$\pi/4=1-1/3+1/5-1/7+-\cdot\cdot$ ----①

を連想してしまう。①の収束は遅い。

Ａ１，Ａ２は収束が速い。任意の実数 a(>0)で成り立つ点がポイントであり、収束をいくらでも速くできる。πの近似公式は数多いが、任意の a で表したものは少ないと思われ、πの桁数計算に貢献できるかもしれない。私はその方面には興味がないので、自由に使っていただきたい。

＝＝

改訂 2024.9.23 杉岡幹生

2024.9.21 杉岡幹生

＜参考文献＞

・「マグロウヒル　数学公式・数表ハンドブック」(Murray R. Spiegel 著、氏家勝巳訳、オーム社)

・「数学公式Ⅰ」「数学公式Ⅱ」(森口・宇田川・一松、岩波書店)

改訂 rev.1.01　＜Ｌ１＞と＜Ｌ２＞の条件 "(0 < |b| ≦ a)"を "0 ≦ |b| ≦ a 且つ a ≠ 0" に変更。書き損じ等を訂正。