＜ 三角関数と双曲線関数の融合域　その１０ ＞

新たに積分式が二つ得られたので下方に青色で示す。これまでの式と一緒に示した。なお[E1]と[E7]、そして[E6]と[E10]は同値であると気づいたのでそれぞれ後者を削除した。よって[E7]、[E10]は欠番とした。

以降において、双曲線関数 sinh, cosh, tanh はそれぞれ sh, ch, th と略記した。例えば、sh2a は sinh(2a)のことである。$\tan^{-1}$, th^{-1} はそれぞれ arctan, arctanh。log は自然対数。L(1)、L(2)、Z(2)は次のものである。

$L(1)=1-1/3+1/5-1/7+-\cdots=\pi/4$

$L(2)=1-1/3^2+1/5^2-1/7^2+-\cdots=0.91596559\cdots=$ カタランの定数

$Z(2)=(3/4)\zeta(2)=1+1/3^2+1/5^2+1/7^2+\cdots=\pi^2/8$

さらに Z(s)は、私が独自に使っているもので、$Z(s)=1+1/3^s+1/5^s+1/7^s+\cdots=(1-1/2^s)\zeta(s)$ であり、本質的に $\zeta(s)$ そのものである。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

＜ 積分式 ＞

$$\log 2=((a^2+1)/2)\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{\mathrm{ch}ax+\cos x}dx \qquad \text{-----[A3]}$$

(a は 0 でない任意の実数)

$$\log 2=((a^2-1)/2)\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}ax+\mathrm{ch}x}dx \qquad \text{-----[A5]}$$

(a は 1 より大きい任意の実数)

$$\pi=\int_0^{\infty}(1/a)\log\left(\frac{\mathrm{ch}x+\sin a}{\mathrm{ch}x-\sin a}\right)dx \qquad \text{-----[B3]}$$

(a は $0<|a|\le\pi/2$ を満たす任意の実数。 $a\to0$ でも式は成立。)

$$L(1)=\pi/4=(a^2+1)\int_0^{\infty}\frac{\sin x\cdot\mathrm{sh}ax}{\mathrm{ch}2ax+\cos 2x}dx \qquad \text{-----[B4]}$$

(a は 0 より大きい任意の実数)

$$L(1)=\pi/4=(a^2-1)\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{sh}x\cdot\mathrm{sh}ax}{\mathrm{ch}2ax+\mathrm{ch}2x}dx \qquad \text{-----[B6]}$$

(a は 1 より大きい任意の実数)

$$Z(2)=\pi^2/8=((a^2+1)/2)\int_0^{\infty}\tan^{-1}\left(\frac{\sin x}{\mathrm{sh}ax}\right)dx \qquad \text{------[C8]}$$

(a は 0 より大きい任意の実数)

$$Z(2)=\pi^2/8=((a^2-1)/2)\int_0^{\infty}\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{sh}ax}\right)dx \qquad \text{------[C10]}$$

(a は 1 より大きい任意の実数)

$$\zeta(2)=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdot\cdot=\pi^2/6=((a^2-1)/(2a))\int_0^\infty\{ax-\log(2(\mathrm{ch}ax-\mathrm{ch}x))\}dx$$ ---[C13]

(a は 1 より大きい任意の実数)

$$\zeta(2)=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdot\cdot=\pi^2/6=((a^2+1)/(2a))\int_0^\infty\{ax-\log(2(\mathrm{ch}ax-\cos x))\}dx$$ ---[C15]

(a は 0 より大きい任意の実数)

$$L(2)=((a^2-1)/2)\int_0^\infty\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}ax}\right)dx$$ --------[D7]

(a は、|a|が 1 より大きい任意の実数)

$$L(2)=((a^2+1)/4)\int_0^\infty\log\left(\frac{\mathrm{ch}ax+\sin x}{\mathrm{ch}ax-\sin x}\right)dx$$ -------[D11]

(a は 0 でない任意の実数)

$$a(2\pi-a)/2=\int_0^\infty\log\left(\frac{\mathrm{ch}x-\cos a}{\mathrm{ch}x-1}\right)dx$$ ------[I a−1]

(a は $0\leqq a\leqq 2\pi$ を満たす任意の実数)

$$\frac{\cos a}{1^3}+\frac{\cos 3a}{3^3}+\frac{\cos 5a}{5^3}+\frac{\cos 7a}{7^3}+\cdot\cdot=\int_0^\infty\left(\frac{x}{4}\right)\log\left(\frac{\mathrm{ch}x+\cos a}{\mathrm{ch}x-\cos a}\right)dx$$ ------[I a−2]

(a は任意の実数。cosa は cos(a) のこと)

$$\frac{\sin a}{1^2}+\frac{\sin 3a}{3^2}+\frac{\sin 5a}{5^2}+\frac{\sin 7a}{7^2}+\cdot\cdot=\int_0^\infty\left(\frac{1}{2}\right)\tan^{-1}\left(\frac{\sin a}{\mathrm{sh}x}\right)dx$$ ----[I a−3]

(a は任意の実数)

$$\frac{\sin a}{1^4}+\frac{\sin 3a}{3^4}+\frac{\sin 5a}{5^4}+\frac{\sin 7a}{7^4}+\cdot\cdot=\int_0^\infty\left(\frac{x^2}{4}\right)\tan^{-1}\left(\frac{\sin a}{\mathrm{sh}x}\right)dx$$ ----[I a−4]

(a は任意の実数)

$$\frac{\cos a}{1^5}+\frac{\cos 3a}{3^5}+\frac{\cos 5a}{5^5}+\frac{\cos 7a}{7^5}+\cdot\cdot=\int_0^\infty\left(\frac{x^3}{24}\right)\log\left(\frac{\mathrm{ch}x+\cos a}{\mathrm{ch}x-\cos a}\right)dx$$ ------[I a−5]

(a は任意の実数)

$$\frac{\sin a}{1^6}+\frac{\sin 3a}{3^6}+\frac{\sin 5a}{5^6}+\frac{\sin 7a}{7^6}+\cdot\cdot=\int_0^\infty\left(\frac{x^4}{48}\right)\tan^{-1}\left(\frac{\sin a}{\mathrm{sh}x}\right)dx$$ ----[I a−6]

(a は任意の実数)

$$\frac{\cos a}{1^7}+\frac{\cos 3a}{3^7}+\frac{\cos 5a}{5^7}+\frac{\cos 7a}{7^7}+\cdot\cdot=\int_0^\infty\left(\frac{x^5}{480}\right)\log\left(\frac{\mathrm{ch}x+\cos a}{\mathrm{ch}x-\cos a}\right)dx$$ ------[I a−7]

(a は任意の実数)

$$\frac{\sin a}{1^8}+\frac{\sin 3a}{3^8}+\frac{\sin 5a}{5^8}+\frac{\sin 7a}{7^8}+\cdot\cdot=\int_0^\infty\left(\frac{x^6}{1440}\right)\tan^{-1}\left(\frac{\sin a}{\mathrm{sh}x}\right)dx \quad \text{----[I a-8]}$$

(a は任意の実数)

$$\frac{\cos a}{1^9}+\frac{\cos 3a}{3^9}+\frac{\cos 5a}{5^9}+\frac{\cos 7a}{7^9}+\cdot\cdot=\int_0^\infty\left(\frac{x^7}{20160}\right)\log\left(\frac{\mathrm{ch}x+\cos a}{\mathrm{ch}x-\cos a}\right)dx \quad \text{-----[I a-9]}$$

(a は任意の実数)

[ゼータの香りの漂う公式に関連した積分式]

$$\frac{a\pi/2}{\mathrm{ch}(a\pi/2)}=2a\left\{\frac{1}{1^2+a^2}-\frac{3}{3^2+a^2}+\frac{5}{5^2+a^2}-\frac{7}{7^2+a^2}+-\cdot\cdot\right\}=\int_0^\infty\frac{\cos x}{\mathrm{ch}(x/a)}dx \quad \text{---[E1]}$$

(a は 0 より大きい任意の実数)

$$(a\pi/2)\mathrm{th}(a\pi/2)=2a^2\left\{\frac{1}{1^2+a^2}+\frac{1}{3^2+a^2}+\frac{1}{5^2+a^2}+\frac{1}{7^2+a^2}+\cdot\cdot\right\}=\int_0^\infty\frac{\sin x}{\mathrm{sh}(x/a)}dx \quad \text{---[E2]}$$

(a は 0 より大きい任意の実数)

$$2a^2\left\{\frac{1}{1^2+a^2}-\frac{1}{3^2+a^2}+\frac{1}{5^2+a^2}-\frac{1}{7^2+a^2}+-\cdot\cdot\right\}=\int_0^\infty\frac{\sin x}{\mathrm{ch}(x/a)}dx \quad \text{---[E3]}$$

(a は 0 でない任意の実数)

$$1-\frac{a\pi}{\mathrm{sh}(a\pi)}=2a^2\left\{\frac{1}{1^2+a^2}-\frac{1}{2^2+a^2}+\frac{1}{3^2+a^2}-\frac{1}{4^2+a^2}+-\cdot\cdot\right\}=2\int_0^\infty\frac{\sin x}{1+e^{(x/a)}}dx \quad \text{---[E4]}$$

(a は 0 より大きい任意の実数)

$$\frac{a\pi}{\mathrm{th}(a\pi)}-1=2a^2\left\{\frac{1}{1^2+a^2}+\frac{1}{2^2+a^2}+\frac{1}{3^2+a^2}+\frac{1}{4^2+a^2}+\cdot\cdot\right\}=2\int_0^\infty\frac{\sin x}{-1+e^{(x/a)}}dx \quad \text{---[E5]}$$

(a は 0 より大きい任意の実数)

$$a\left\{\frac{1}{1^2+a^2}-\frac{2}{2^2+a^2}+\frac{3}{3^2+a^2}-\frac{4}{4^2+a^2}+-\cdot\cdot\right\}=\int_0^\infty\frac{\cos x}{1+e^{(x/a)}}dx \quad \text{-----[E6]}$$

(a は 0 より大きい任意の実数)

$$2a^2\left\{\frac{1}{(1^2+a^2)}+\frac{1}{3(3^2+a^2)}+\frac{1}{5(5^2+a^2)}+\frac{1}{7(7^2+a^2)}+\cdot\cdot\right\}=\int_0^\infty\sin x\cdot\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{ch}(x/a)}\right)dx \quad \text{---- [E8]}$$

(a は 0 でない任意の実数)

$$a^2\left\{\frac{1}{(1^2+a^2)}+\frac{1}{2(2^2+a^2)}+\frac{1}{3(3^2+a^2)}+\frac{1}{4(4^2+a^2)}+\cdot\cdot\right\}=\int_0^\infty\sin x\cdot\log\left(\frac{1}{1-e^{(-x/a)}}\right)dx \quad \text{---- [E9]}$$

(a は 0 より大きい任意の実数)

$$a^2\left\{\frac{1}{1^2+a^2}+\frac{\alpha}{2^2+a^2}+\frac{\alpha^2}{3^2+a^2}+\frac{\alpha^3}{4^2+a^2}+\cdot\cdot\right\}=\int_0^\infty\frac{\sin x}{-\alpha+e^{(x/a)}}dx \quad \text{-----[E11]}$$

(a は 0 より大きい任意の実数, α は −1 ≦ α ≦ 1 を満たす任意の実数)

$$a\left\{\frac{1}{1^2+a^2}+\frac{2\alpha}{2^2+a^2}+\frac{3\alpha^2}{3^2+a^2}+\frac{4\alpha^3}{4^2+a^2}+\cdot\cdot\right\}=\int_0^\infty \frac{\cos x}{-\alpha+e^{(x/a)}}dx \qquad \text{-----[E12]}$$

(a は 0 より大きい任意の実数, α は $-1 \leqq \alpha < 1$ を満たす任意の実数)

＜(積分)変換公式 ＞

$$\int_0^\infty \left(1-\frac{\mathrm{sh}ax}{\mathrm{ch}ax+\cos x}\right)dx = a\int_0^\infty \frac{\sin x}{\mathrm{ch}ax+\cos x}dx \qquad \text{-----[1-a]}$$

(a は 0 より大きい任意の実数)

$$\int_0^\infty \left(1-\frac{\mathrm{sh}ax}{\mathrm{ch}ax+\mathrm{ch}x}\right)dx = a\int_0^\infty \frac{\sin x}{\mathrm{ch}ax+\mathrm{ch}x}dx \qquad \text{-----[1-b]}$$

(a は 1 より大きい任意の実数)

$$\int_0^\infty \frac{\cos x\cdot\mathrm{ch}ax}{\mathrm{ch}2ax+\cos 2x}dx = a\int_0^\infty \frac{\sin x\cdot\mathrm{sh}ax}{\mathrm{ch}2ax+\cos 2x}dx \qquad \text{-----[2-a]}$$

(a は 0 でない任意の実数)

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{ch}x\cdot\mathrm{ch}ax}{\mathrm{ch}2ax+\mathrm{ch}2x}dx = a\int_0^\infty \frac{\mathrm{sh}x\cdot\mathrm{sh}ax}{\mathrm{ch}2ax+\mathrm{ch}2x}dx \qquad \text{-----[2-b]}$$

(a は$|a|$が 1 より大きい任意の実数)

$$\int_0^\infty\{ax-\log(2(\mathrm{ch}ax-\mathrm{ch}x))\}dx = 2\int_0^\infty\{-ax+\log(2(\mathrm{ch}ax+\mathrm{ch}x))\}dx \qquad \text{---[3-a]}$$

(a は 1 より大きい任意の実数)

$$\int_0^\infty\{ax-\log(2(\mathrm{ch}ax-\cos x))\}dx = 2\int_0^\infty\{-ax+\log(2(\mathrm{ch}ax+\cos x))\}dx \qquad \text{---[3-b]}$$

(a は 0 より大きい任意の実数)

$$\int_0^\infty \log\left(\frac{\mathrm{ch}ax-\cos x}{\mathrm{ch}ax-\mathrm{ch}x}\right)dx = 2\int_0^\infty \log\left(\frac{\mathrm{ch}ax+\mathrm{ch}x}{\mathrm{ch}ax+\cos x}\right)dx \qquad \text{-------[3-c]}$$

(a は$|a|$が 1 より大きい任意の実数)

$$\int_0^\infty \mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\cos x}{\mathrm{ch}ax}\right)dx = a\int_0^\infty \tan^{-1}\left(\frac{\sin x}{\mathrm{sh}ax}\right)dx \qquad \text{-------[4-a]}$$

(a は 0 でない任意の実数)

$$\int_0^\infty \mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{ch}x}{\mathrm{ch}ax}\right)dx = a\int_0^\infty \mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{sh}ax}\right)dx \qquad \text{-------[4-b]}$$

(a は$|a|$が 1 より大きい任意の実数)

$$\int_0^{\infty} \tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{chx}}{\mathrm{shax}}\right)dx \ =a\int_0^{\infty} \tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{shx}}{\mathrm{chax}}\right)dx \qquad \text{------[5-a]}$$

(a は|a|が 1 より大きい任意の実数)

$$\int_0^{\infty} \tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{cosx}}{\mathrm{shax}}\right)dx \ =a\int_0^{\infty} \mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{sinx}}{\mathrm{chax}}\right)dx \qquad \text{------[5-b]}$$

(a は 0 でない任意の実数)

$$\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{sinx}}{\mathrm{shax}}dx \ =\mathrm{sh}(\pi/(2a))\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{cosx}}{\mathrm{chax}}dx \qquad \text{-------[6-a]}$$

(a は 0 でない任意の実数)

$$\int_0^{\infty} \frac{x\cdot\mathrm{sinx}}{\mathrm{chax}-\mathrm{cosx}}dx \ =2\int_0^{\infty} \frac{x\cdot\mathrm{sinx}}{\mathrm{chax}+\mathrm{cosx}}dx \qquad \text{-----[7-a]}$$

(a は 0 でない任意の実数)

$$\int_0^{\infty} x\left(1-\frac{\mathrm{shax}}{\mathrm{chax}-\mathrm{chx}}\right)dx \ =2\int_0^{\infty} x\left(-1+\frac{\mathrm{shax}}{\mathrm{chax}+\mathrm{chx}}\right)dx \qquad \text{------[8-a]}$$

(a は 1 より大きい任意の実数)

$$\int_0^{\infty} x\left(1-\frac{\mathrm{shax}}{\mathrm{chax}-\mathrm{cox}}\right)dx \ =2\int_0^{\infty} x\left(-1+\frac{\mathrm{shax}}{\mathrm{chax}+\mathrm{cox}}\right)dx \qquad \text{------[8-b]}$$

(a は 0 より大きい任意の実数)

$$\int_0^{\infty} \left\{-ax+\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{thax}}{\mathrm{thx}}\right)\right\}dx \ =2\int_0^{\infty}\left\{ax-\mathrm{th}^{-1}\left(\mathrm{thx}\cdot\mathrm{thax}\right)\right\}dx \quad \text{---[9-a]}$$

(a は|a|が 1 より小さい任意の実数)

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

これら青色式が得られた。[E11]、[E12]は二種類の任意の実数（条件付き）で成り立つので恒等式となっている。これらは、三角関数と双曲線関数の融合域で<u>三変数の</u>母等式を導き、それに<u>変数定数倍-積分定理</u>を適用して導いた。変数定数倍-積分定理は下方のものである。

[E4]、[E5]と[E11]を並べよう。

$$1-\frac{a\pi}{\mathrm{sh}(a\pi)}=2a^2\left\{\frac{1}{1^2+a^2}-\frac{1}{2^2+a^2}+\frac{1}{3^2+a^2}-\frac{1}{4^2+a^2}+-\cdot\cdot\right\}=2\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{sinx}}{1+e^{(x/a)}}dx \quad \text{---[E4]}$$

(a は 0 より大きい任意の実数)

$$\frac{a\pi}{\mathrm{th}(a\pi)}-1=2a^2\left\{\frac{1}{1^2+a^2}+\frac{1}{2^2+a^2}+\frac{1}{3^2+a^2}+\frac{1}{4^2+a^2}+\cdot\cdot\right\}=2\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{sinx}}{-1+e^{(x/a)}}dx \quad \text{---[E5]}$$

(a は 0 より大きい任意の実数)

$$a^2\left\{\frac{1}{1^2+a^2}+\frac{\alpha}{2^2+a^2}+\frac{\alpha^2}{3^2+a^2}+\frac{\alpha^3}{4^2+a^2}+\cdot\cdot\right\}=\int_0^\infty \frac{\sin x}{-\alpha+e^{(x/a)}}dx \qquad \text{-----[E11]}$$

（a は 0 より大きい任意の実数，α は $-1 \leqq \alpha \leqq 1$ を満たす任意の実数）

眺めると、[E11]は[E4]と[E5]の一般化になっている。[E11]でαが 1 のとき[E5]、αが-1 のとき[E4]となる。[E11]は二変数の恒等式であり、またゼータの香りが漂っている。左辺はαのべき級数になっているので、これはフーリエ級数とも考えられる。式は簡明だが、[E11]は多彩な面をもった式である。

これは、[E6]と[E12]の関係でも同じことがいえる。

****

＜変数定数倍−積分定理＞（この頁で証明したとき、名前はまだ付けていない）

任意の実関数 F(x)に対し 0～∞の範囲で積分した結果が有限の値となる場合、次の関係が成り立つ。ここで c は、c＞0 の実定数である。

$$\int_0^\infty F(cx)dx=(1/c)\int_0^\infty F(x)dx$$

****

最後に、想うことや気付いた点など述べておく。

****

●冒頭に列挙した多数の公式は、証明の途中で上記の変数定数倍−積分定理を使って得られたものである。

この定理はちょうど１年前に得たものだが、これによって非常に多くの公式を得てきた。定理の意味は簡明であり、証明は高校生でも理解できるほど簡単である。その簡単さとは裏腹にこの定理は力が強く、様々な公式を導いてくれる。その様子は時間・空間をワープするような感じといったらよいだろうか。途中をとばしてしまう感じ・・。よって式が証明されても、どうしてこんな式が成り立つのか？本当のカラクリはよくわからない！というのが正直なところである。

簡単なものが役に立つということは、数学ではよく感じる。数学者の黒川氏は、雑誌「数学のたのしみ No10」(日本評論社)の中で、ある重要な補題に関連して「鍵はたいていかんたんなのだ」と述べているが、本当にそう思う。

●削除した[E7]と[E10]を念のため示しておく。[E1]と[E7]、そして[E6]と[E10]が同値であること私は長く気付かなかった・・

$$\left(\frac{\pi}{2}\right)\left\{1-\frac{1}{ch(a\pi/2)}\right\}=2a^2\left\{\frac{1}{(1^2+a^2)}-\frac{1}{3(3^2+a^2)}+\frac{1}{5(5^2+a^2)}-\frac{1}{7(7^2+a^2)}+-\cdot\cdot\right\}$$

$$=\int_0^\infty \sin x\cdot\tan^{-1}\left(\frac{1}{sh(x/a)}\right)dx \qquad \text{----------[E7]}$$

（a は 0 より大きい任意の実数）

$$a^2\left\{\frac{1}{(1^2+a^2)}-\frac{1}{2(2^2+a^2)}+\frac{1}{3(3^2+a^2)}-\frac{1}{4(4^2+a^2)}+-\cdot\cdot\right\}=\int_0^\infty \sin x\cdot\log\left(1+e^{(-x/a)}\right)dx \quad \text{--- [E10]}$$

（a は 0 より大きい任意の実数）

****

2024.9.8 杉岡幹生

＜参考文献＞

・「数学公式Ⅱ」（森口・宇田川・一松、岩波書店）

・「マグロウヒル　数学公式・数表ハンドブック」（Murray R. Spiegel 著、氏家勝巳訳、オーム社）

・「数学のたのしみ No10」（日本評論社）