＜ 三角関数と双曲線関数の融合域（その９）＞ rev1.01

改訂版 rev1.01　2024/9/1
　初版で公式集の公式と異なると言っていた式は公式集の式と本質的に同値とわかりました。よってその内容を改訂し、本稿では以下のように公式集の式に一致していないものに置き換えましたので、了解願います。

　＜ゼータの香りの漂う・・（その３２５）＞の式の構造を調べた結果、[７]（[８]は[７]と本質的に同値）の式は公式集にないと分かり、その[７]でもって前回分の下方青色の＜K1＞,＜K2＞を置き換えた（上書きした)。よって＜K1＞は[７]そのものである。

　以下では、双曲線関数 sinh, cosh, tanh はそれぞれ sh, ch, th と略記した。例えば、sh2a は sinh(2a)のことである。a は任意の実数であり、よって例えば、$(a \neq 0)$は「a は 0 でない任意の実数」を意味する。$\tan^{-1}$は arctan である。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

＜ 恒等式 ＞

$$\frac{1}{\mathrm{cha}-1}-\frac{1}{\mathrm{sha}}=2\left(\frac{1}{\mathrm{ch2a}-\mathrm{cha}}+\frac{1}{\mathrm{ch4a}-\mathrm{cha}}+\frac{1}{\mathrm{ch6a}-\mathrm{cha}}+\frac{1}{\mathrm{ch8a}-\mathrm{cha}}+\cdot\cdot\right) \quad \text{-----<1>}$$

$(a > 0)$

$$\frac{1}{\mathrm{sha}}-\frac{1}{\mathrm{cha}+1}=2\left(\frac{1}{\mathrm{ch2a}+\mathrm{cha}}+\frac{1}{\mathrm{ch4a}+\mathrm{cha}}+\frac{1}{\mathrm{ch6a}+\mathrm{cha}}+\frac{1}{\mathrm{ch8a}+\mathrm{cha}}+\cdot\cdot\right) \quad \text{-----<2>}$$

$(a > 0)$

$$\frac{1}{\mathrm{sh}^2(a/2)}=4\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{ch2a}-\mathrm{cha}}+\frac{\mathrm{ch2a}}{\mathrm{ch4a}-\mathrm{cha}}+\frac{\mathrm{ch3a}}{\mathrm{ch6a}-\mathrm{cha}}+\frac{\mathrm{ch4a}}{\mathrm{ch8a}-\mathrm{cha}}+\cdot\cdot\right) \quad \text{-----<3>}$$

$(a \neq 0)$

$$\frac{1}{\mathrm{ch}^2(a/2)}=4\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{ch2a}+\mathrm{cha}}-\frac{\mathrm{ch2a}}{\mathrm{ch4a}+\mathrm{cha}}+\frac{\mathrm{ch3a}}{\mathrm{ch6a}+\mathrm{cha}}-\frac{\mathrm{ch4a}}{\mathrm{ch8a}+\mathrm{cha}}+-\cdot\cdot\right) \quad \text{----<4>}$$

$(a \neq 0)$

$$\frac{1}{\mathrm{sha}}=2\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch2a}-\mathrm{cha}}-\frac{\mathrm{sh2a}}{\mathrm{ch4a}-\mathrm{cha}}+\frac{\mathrm{sh3a}}{\mathrm{ch6a}-\mathrm{cha}}-\frac{\mathrm{sh4a}}{\mathrm{ch8a}-\mathrm{cha}}+-\cdot\cdot\right) \quad \text{-----<5>}$$

$(a \neq 0)$

$$\frac{1}{\mathrm{sha}}=2\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch2a+cha}}+\frac{\mathrm{sh2a}}{\mathrm{ch4a+cha}}+\frac{\mathrm{sh3a}}{\mathrm{ch6a+cha}}+\frac{\mathrm{sh4a}}{\mathrm{ch8a+cha}}+\cdot\ \cdot\right) \qquad \text{-----<6>}$$

$$(a \neq 0)$$

$$\frac{\mathrm{ch}\left(\frac{a}{2}\right)}{2\mathrm{sh}\left(\frac{a}{2}\right)}-\frac{1}{2}$$

$$=\left(\frac{\mathrm{sh2a}}{\mathrm{ch2a-cha}}-1\right)-\left(\frac{\mathrm{sh4a}}{\mathrm{ch4a-cha}}-1\right)+\left(\frac{\mathrm{sh6a}}{\mathrm{ch6a-cha}}-1\right)-\left(\frac{\mathrm{sh8a}}{\mathrm{ch8a-cha}}-1\right)+-\cdot\ \cdot \qquad \text{--<7-1>}$$

$$(a > 0)$$

$$\frac{1}{2}-\frac{\mathrm{sh}\left(\frac{a}{2}\right)}{2\mathrm{ch}\left(\frac{a}{2}\right)}$$

$$=\left(1-\frac{\mathrm{sh2a}}{\mathrm{ch2a+cha}}\right)-\left(1-\frac{\mathrm{sh4a}}{\mathrm{ch4a+cha}}\right)+\left(1-\frac{\mathrm{sh6a}}{\mathrm{ch6a+cha}}\right)-\left(1-\frac{\mathrm{sh8a}}{\mathrm{ch8a+cha}}\right)+-\cdot\ \cdot \qquad \text{--<7-2>}$$

$$(a > 0)$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)\tan^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{sha}}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{sh2a}}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{sh4a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{sh6a}}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{sh8a}}\right)+-\cdot\ \cdot \text{--<B>}$$

$$(a \neq 0)$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)\tan^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{sha}}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch2a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch4a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch6a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch8a}}\right)+\cdot\ \cdot \text{---<D>}$$

$$(a \neq 0)$$

$$\mathrm{th}\left(\frac{a}{2}\right)=\left(\frac{\mathrm{ch2a-cha}}{\mathrm{ch2a+cha}}\right)\times\left(\frac{\mathrm{ch4a+cha}}{\mathrm{ch4a-cha}}\right)\times\left(\frac{\mathrm{ch6a-cha}}{\mathrm{ch6a+cha}}\right)\times\left(\frac{\mathrm{ch8a+cha}}{\mathrm{ch8a-cha}}\right)\times\cdot\ \cdot \qquad \text{----<E1>}$$

$$(a > 0)$$

$$\mathrm{th}\left(\frac{a}{2}\right)=\left(\frac{\mathrm{sh2a-sha}}{\mathrm{sh2a+sha}}\right)\times\left(\frac{\mathrm{sh4a-sha}}{\mathrm{sh4a+sha}}\right)\times\left(\frac{\mathrm{sh6a-sha}}{\mathrm{sh6a+sha}}\right)\times\left(\frac{\mathrm{sh8a-sha}}{\mathrm{sh8a+sha}}\right)\times\cdot\ \cdot \qquad \text{----<E2>}$$

$$(a > 0)$$

$$\frac{1}{(e^a-1)}+\frac{1}{2(e^{2a}-1)}+\frac{1}{3(e^{3a}-1)}+\frac{1}{4(e^{4a}-1)}+\cdot\cdot$$
$$=\log\left(\frac{1}{(1-e^{-a})}\times\frac{1}{(1-e^{-2a})}\times\frac{1}{(1-e^{-3a})}\times\frac{1}{(1-e^{-4a})}\times\cdot\cdot\right)$$ ----<F1>

$(a>0)$

$$\frac{1}{sh^2(a/2)}=4sha\left(\frac{sh2a}{(ch2a-cha)^2}+\frac{sh4a}{(ch4a-cha)^2}+\frac{sh6a}{(ch6a-cha)^2}+\frac{sh8a}{(ch8a-cha)^2}+\cdot\cdot\right)$$ ---<G1>

$(a\neq 0)$

$$\frac{1}{ch^2(a/2)}=4sha\left(\frac{sh2a}{(ch2a+cha)^2}+\frac{sh4a}{(ch4a+cha)^2}+\frac{sh6a}{(ch6a+cha)^2}+\frac{sh8a}{(ch8a+cha)^2}+\cdot\cdot\right)$$ ---<G2>

$(a\neq 0)$

$$tha=\left(\frac{ch3a}{cha}\cdot\frac{th2a-tha}{th2a+tha}\right)\times\left(\frac{ch5a}{ch3a}\cdot\frac{th4a-tha}{th4a+tha}\right)\times\left(\frac{ch7a}{ch5a}\cdot\frac{th6a-tha}{th6a+tha}\right)\times\left(\frac{ch9a}{ch7a}\cdot\frac{th8a-tha}{th8a+tha}\right)\times\cdot\cdot$$ --<J>

$(a>0)$

$$\frac{1}{e^a-1}-\frac{3}{e^{3a}-1}+\frac{5}{e^{5a}-1}-\frac{7}{e^{7a}-1}+-\cdot\cdot=\frac{sha}{ch2a+1}+\frac{sh2a}{ch4a+1}+\frac{sh3a}{ch6a+1}+\frac{sh4a}{ch8a+1}+\cdot\cdot$$ --<K1>

$(a>0)$

$$\frac{1}{1-x}-\frac{3x^2}{1-x^3}+\frac{5x^4}{1-x^5}-\frac{7x^6}{1-x^7}+-\cdot\cdot$$
$$=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}+\frac{x(1-x^4)}{(1+x^4)^2}+\frac{x^2(1-x^6)}{(1+x^6)^2}+\frac{x^3(1-x^8)}{(1+x^8)^2}+\cdot\cdot$$ ---<K2>

$(|x|<1)$

＜K1＞と＜K2＞は同値

===================================

青色の＜K1＞と＜K2＞を追加した。＜K2＞は、＜K1＞で e^a を $1/x$ で置き換えて得られたものなので＜K1＞と＜K2＞は同値である。ここで＜K1＞は＜ゼータの香りの漂う・・（その３２５）＞の[７]そのものである。なお、同頁の[８]は[７]と本質的に同値である。

よく見ると、＜K2＞の左辺はランバート（ランベルト）級数 $\Sigma A_n x^n/(1-x^n)$ の類似物になっている（＜K2＞の両辺に x を掛けるとわかりやすい）。

また、同頁の[１]（下方参照）で e^{2a} を $1/x$ で置き換えれば、公式集にある下記の[ランバート級数の公式]になる。この公式はランバート級数の多くの公式の中の一つである。

なお、同頁の[２],[３],[４],[５],[６]は全て[１]と本質的に同値である（[１]に還元できる）。よってそれらも下記[ランバート級数の公式]と本質的に同値となる。

$$\frac{1}{e^{2a}-1}+\frac{2}{e^{4a}-1}+\frac{3}{e^{6a}-1}+\frac{4}{e^{8a}-1}+\cdot\cdot=\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{sh^2 a}+\frac{1}{sh^2 2a}+\frac{1}{sh^2 3a}+\frac{1}{sh^2 4a}+\cdot\cdot\right) \quad ---[1]$$

$(a>0)$

[ランバート級数の公式]

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^n}{1-x^n}=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{x^m}{(1-x^m)^2}$$

$(|x|<1)$

なお、<K2>をΣ記号で表すと、次となる。

<K2>

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(2n-1)x^{2n-2}}{1-x^{2n-1}}=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{x^{m-1}(1-x^{2m})}{(1+x^{2m})^2}$$

$(|x|<1)$

2024.8.31 杉岡幹生

Rev.1.01　2024.9.1 杉岡幹生

＜参考文献＞

・「マグロウヒル　数学公式・数表ハンドブック」（Murray R. Spiegel 著、氏家勝巳訳、オーム社）

・「数学公式Ⅰ」「数学公式Ⅱ」「数学公式Ⅲ」（森口・宇田川・一松、岩波書店）