＜ 三角関数と双曲線関数の融合域　その８ ＞ rev1.01

新たな公式がいくつか得られたので、下方に青色で示す。これまでの式と一緒に示した。また[E4]，[E5]，［E6]は、さらに変形できることに気づき、簡単化した（茶色で示した）。

なお、以降において双曲線関数 sinh, cosh, tanh はそれぞれ sh, ch, th と略記した。例えば、sh2a は sinh(2a) のことである。$\tan^{-1}$, th^{-1} はそれぞれ arctan, arctanh。log は自然対数。L(1)、L(2)、Z(2) は次のものである。

$L(1)=1-1/3+1/5-1/7+-\cdots=\pi/4$

$L(2)=1-1/3^2+1/5^2-1/7^2+-\cdots=0.91596559\cdots$ ＝カタランの定数

$Z(2)=(3/4)\zeta(2)=1+1/3^2+1/5^2+1/7^2+\cdots=\pi^2/8$

Z(s) は、私が独自に使っているもので、$Z(s)=1+1/3^s+1/5^s+1/7^s+\cdots=(1-1/2^s)\zeta(s)$ であり、本質的に $\zeta(s)$ そのものである。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

＜ 積分式 ＞

$$\log 2=((a^2+1)/2)\int_0^\infty \frac{\sin x}{\mathrm{ch}\,ax+\cos x}dx \qquad \text{-----[A3]}$$

（a は 0 でない任意の実数）

$$\log 2=((a^2-1)/2)\int_0^\infty \frac{\mathrm{sh}\,x}{\mathrm{ch}\,ax+\mathrm{ch}\,x}dx \qquad \text{-----[A5]}$$

（a は 1 より大きい任意の実数）

$$\pi=\int_0^\infty (1/a)\log\left(\frac{\mathrm{ch}\,x+\sin a}{\mathrm{ch}\,x-\sin a}\right)dx \qquad \text{-----[B3]}$$

（a は $0<|a|\le\pi/2$ を満たす任意の実数。 $a\to 0$ でも式は成立。）

$$L(1)=\pi/4=(a^2+1)\int_0^\infty \frac{\sin x\cdot\mathrm{sh}\,ax}{\mathrm{ch}\,2ax+\cos 2x}dx \qquad \text{-----[B4]}$$

（a は 0 より大きい任意の実数）

$$L(1)=\pi/4=(a^2-1)\int_0^\infty \frac{\mathrm{sh}\,x\cdot\mathrm{sh}\,ax}{\mathrm{ch}\,2ax+\mathrm{ch}\,2x}dx \qquad \text{-----[B6]}$$

（a は 1 より大きい任意の実数）

$$Z(2)=\pi^2/8=((a^2+1)/2)\int_0^\infty \tan^{-1}\left(\frac{\sin x}{\mathrm{sh}\,ax}\right)dx \qquad \text{------[C8]}$$

（a は 0 より大きい任意の実数）

$$Z(2)=\pi^2/8=((a^2-1)/2)\int_0^\infty \mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}\,x}{\mathrm{sh}\,ax}\right)dx \qquad \text{------[C10]}$$

（a は 1 より大きい任意の実数）

$\zeta(2)=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdot\cdot=\pi^2/6=((a^2-1)/(2a))\int_0^\infty\{ax-\log(2(\mathrm{ch}ax-\mathrm{ch}x))\}dx$ ---[C13]

(a は 1 より大きい任意の実数)

$\zeta(2)=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdot\cdot=\pi^2/6=((a^2+1)/(2a))\int_0^\infty\{ax-\log(2(\mathrm{ch}ax-\cos x))\}dx$ ---[C15]

(a は 0 より大きい任意の実数)

$L(2)=((a^2-1)/2)\int_0^\infty \tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}ax}\right)dx$ --------[D7]

(a は、|a|が 1 より大きい任意の実数)

$L(2)=((a^2+1)/4)\int_0^\infty \log\left(\frac{\mathrm{ch}ax+\sin x}{\mathrm{ch}ax-\sin x}\right)dx$ -------[D11]

(a は 0 でない任意の実数)

$a(2\pi-a)/2=\int_0^\infty \log\left(\frac{\mathrm{ch}x-\cos a}{\mathrm{ch}x-1}\right)dx$ ------[Ⅰa-1]

(a は $0\leqq a\leqq 2\pi$ を満たす任意の実数)

$\frac{\cos a}{1^3}+\frac{\cos 3a}{3^3}+\frac{\cos 5a}{5^3}+\frac{\cos 7a}{7^3}+\cdot\cdot=\int_0^\infty\left(\frac{x}{4}\right)\log\left(\frac{\mathrm{ch}x+\cos a}{\mathrm{ch}x-\cos a}\right)dx$ ------[Ⅰa-2]

(a は任意の実数。cosa は cos(a) のこと)

$\frac{\sin a}{1^2}+\frac{\sin 3a}{3^2}+\frac{\sin 5a}{5^2}+\frac{\sin 7a}{7^2}+\cdot\cdot=\int_0^\infty\left(\frac{1}{2}\right)\tan^{-1}\left(\frac{\sin a}{\mathrm{sh}x}\right)dx$ ----[Ⅰa-3]

(a は任意の実数)

$\frac{\sin a}{1^4}+\frac{\sin 3a}{3^4}+\frac{\sin 5a}{5^4}+\frac{\sin 7a}{7^4}+\cdot\cdot=\int_0^\infty\left(\frac{x^2}{4}\right)\tan^{-1}\left(\frac{\sin a}{\mathrm{sh}x}\right)dx$ ----[Ⅰa-4]

(a は任意の実数)

$\frac{\cos a}{1^5}+\frac{\cos 3a}{3^5}+\frac{\cos 5a}{5^5}+\frac{\cos 7a}{7^5}+\cdot\cdot=\int_0^\infty\left(\frac{x^3}{24}\right)\log\left(\frac{\mathrm{ch}x+\cos a}{\mathrm{ch}x-\cos a}\right)dx$ ------[Ⅰa-5]

(a は任意の実数)

$\frac{\sin a}{1^6}+\frac{\sin 3a}{3^6}+\frac{\sin 5a}{5^6}+\frac{\sin 7a}{7^6}+\cdot\cdot=\int_0^\infty\left(\frac{x^4}{48}\right)\tan^{-1}\left(\frac{\sin a}{\mathrm{sh}x}\right)dx$ ----[Ⅰa-6]

(a は任意の実数)

$\frac{\cos a}{1^7}+\frac{\cos 3a}{3^7}+\frac{\cos 5a}{5^7}+\frac{\cos 7a}{7^7}+\cdot\cdot=\int_0^\infty\left(\frac{x^5}{480}\right)\log\left(\frac{\mathrm{ch}x+\cos a}{\mathrm{ch}x-\cos a}\right)dx$ ------[Ⅰa-7]

(a は任意の実数)

$$\frac{\sin a}{1^8}+\frac{\sin 3a}{3^8}+\frac{\sin 5a}{5^8}+\frac{\sin 7a}{7^8}+\cdot\cdot=\int_0^\infty\left(\frac{x^6}{1440}\right)\tan^{-1}\left(\frac{\sin a}{\mathrm{sh}x}\right)dx \quad \text{----[I a-8]}$$

(a は任意の実数)

$$\frac{\cos a}{1^9}+\frac{\cos 3a}{3^9}+\frac{\cos 5a}{5^9}+\frac{\cos 7a}{7^9}+\cdot\cdot=\int_0^\infty\left(\frac{x^7}{20160}\right)\log\left(\frac{\mathrm{ch}x+\cos a}{\mathrm{ch}x-\cos a}\right)dx \quad \text{-----[I a-9]}$$

(a は任意の実数)

[ゼータの香りの漂う公式に関連した積分式]

$$\frac{a\pi/2}{\mathrm{ch}(a\pi/2)}=2a\left\{\frac{1}{1^2+a^2}-\frac{3}{3^2+a^2}+\frac{5}{5^2+a^2}-\frac{7}{7^2+a^2}+-\cdot\cdot\right\}=\int_0^\infty\frac{\cos x}{\mathrm{ch}(x/a)}dx \quad \text{---[E1]}$$

(a は 0 より大きい任意の実数)

$$(a\pi/2)\mathrm{th}(a\pi/2)=2a^2\left\{\frac{1}{1^2+a^2}+\frac{1}{3^2+a^2}+\frac{1}{5^2+a^2}+\frac{1}{7^2+a^2}+\cdot\cdot\right\}=\int_0^\infty\frac{\sin x}{\mathrm{sh}(x/a)}dx \quad \text{---[E2]}$$

(a は 0 より大きい任意の実数)

$$2a^2\left\{\frac{1}{1^2+a^2}-\frac{1}{3^2+a^2}+\frac{1}{5^2+a^2}-\frac{1}{7^2+a^2}+-\cdot\cdot\right\}=\int_0^\infty\frac{\sin x}{\mathrm{ch}(x/a)}dx \quad \text{---[E3]}$$

(a は 0 でない任意の実数)

$$1-\frac{a\pi}{\mathrm{sh}(a\pi)}=2a^2\left\{\frac{1}{1^2+a^2}-\frac{1}{2^2+a^2}+\frac{1}{3^2+a^2}-\frac{1}{4^2+a^2}+-\cdot\cdot\right\}=2\int_0^\infty\frac{\sin x}{1+e^{(x/a)}}dx \quad \text{---[E4]}$$

(a は 0 より大きい任意の実数)

$$\frac{a\pi}{\mathrm{th}(a\pi)}-1=2a^2\left\{\frac{1}{1^2+a^2}+\frac{1}{2^2+a^2}+\frac{1}{3^2+a^2}+\frac{1}{4^2+a^2}+\cdot\cdot\right\}=2\int_0^\infty\frac{\sin x}{-1+e^{(x/a)}}dx \quad \text{---[E5]}$$

(a は 0 より大きい任意の実数)

$$a\left\{\frac{1}{1^2+a^2}-\frac{2}{2^2+a^2}+\frac{3}{3^2+a^2}-\frac{4}{4^2+a^2}+-\cdot\cdot\right\}=\int_0^\infty\frac{\cos x}{1+e^{(x/a)}}dx \quad \text{-----[E6]}$$

(a は 0 より大きい任意の実数)

$$\left(\frac{\pi}{2}\right)\left\{1-\frac{1}{\mathrm{ch}(a\pi/2)}\right\}=2a^2\left\{\frac{1}{(1^2+a^2)}-\frac{1}{3(3^2+a^2)}+\frac{1}{5(5^2+a^2)}-\frac{1}{7(7^2+a^2)}+-\cdot\cdot\right\}$$

$$=\int_0^\infty\sin x\cdot\tan^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{sh}(x/a)}\right)dx \quad \text{---------- [E7]}$$

(a は 0 より大きい任意の実数)

$$2a^2\left\{\frac{1}{(1^2+a^2)}+\frac{1}{3(3^2+a^2)}+\frac{1}{5(5^2+a^2)}+\frac{1}{7(7^2+a^2)}+\cdot\cdot\right\}=\int_0^\infty\sin x\cdot\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{ch}(x/a)}\right)dx \quad \text{---- [E8]}$$

(a は 0 でない任意の実数)

$$a^2\left\{\frac{1}{(1^2+a^2)}+\frac{1}{2(2^2+a^2)}+\frac{1}{3(3^2+a^2)}+\frac{1}{4(4^2+a^2)}+\cdot\cdot\cdot\right\}=\int_0^{\infty}\sin x\cdot\log\left(\frac{1}{1-e^{(-x/a)}}\right)dx \quad \text{---- [E9]}$$

(a は 0 より大きい任意の実数)

$$a^2\left\{\frac{1}{(1^2+a^2)}-\frac{1}{2(2^2+a^2)}+\frac{1}{3(3^2+a^2)}-\frac{1}{4(4^2+a^2)}+-\cdot\cdot\right\}=\int_0^{\infty}\sin x\cdot\log\left(1+e^{(-x/a)}\right)dx \quad \text{--- [E10]}$$

(a は 0 より大きい任意の実数)

< (積分)変換公式 >

$$\int_0^{\infty}\left(1-\frac{\mathrm{sha}x}{\mathrm{cha}x+\cos x}\right)dx = a\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{\mathrm{cha}x+\cos x}dx \quad \text{-----[1-a]}$$

(a は 0 より大きい任意の実数)

$$\int_0^{\infty}\left(1-\frac{\mathrm{sha}x}{\mathrm{cha}x+\mathrm{ch}x}\right)dx = a\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{\mathrm{cha}x+\mathrm{ch}x}dx \quad \text{-----[1-b]}$$

(a は 1 より大きい任意の実数)

$$\int_0^{\infty}\frac{\cos x\cdot\mathrm{cha}x}{\mathrm{ch}2ax+\cos 2x}dx = a\int_0^{\infty}\frac{\sin x\cdot\mathrm{sha}x}{\mathrm{ch}2ax+\cos 2x}dx \quad \text{-----[2-a]}$$

(a は 0 でない任意の実数)

$$\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{ch}x\cdot\mathrm{cha}x}{\mathrm{ch}2ax+\mathrm{ch}2x}dx = a\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{sh}x\cdot\mathrm{sha}x}{\mathrm{ch}2ax+\mathrm{ch}2x}dx \quad \text{-----[2-b]}$$

(a は|a|が 1 より大きい任意の実数)

$$\int_0^{\infty}\{ax-\log(2(\mathrm{cha}x-\mathrm{ch}x))\}dx = 2\int_0^{\infty}\{-ax+\log(2(\mathrm{cha}x+\mathrm{ch}x))\}dx \quad \text{---[3-a]}$$

(a は 1 より大きい任意の実数)

$$\int_0^{\infty}\{ax-\log(2(\mathrm{cha}x-\cos x))\}dx = 2\int_0^{\infty}\{-ax+\log(2(\mathrm{cha}x+\cos x))\}dx \quad \text{---[3-b]}$$

(a は 0 より大きい任意の実数)

$$\int_0^{\infty}\log\left(\frac{\mathrm{cha}x-\cos x}{\mathrm{cha}x-\mathrm{ch}x}\right)dx = 2\int_0^{\infty}\log\left(\frac{\mathrm{cha}x+\mathrm{ch}x}{\mathrm{cha}x+\cos x}\right)dx \quad \text{-------[3-c]}$$

(a は|a|が 1 より大きい任意の実数)

$$\int_0^{\infty}\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\cos x}{\mathrm{cha}x}\right)dx = a\int_0^{\infty}\tan^{-1}\left(\frac{\sin x}{\mathrm{sha}x}\right)dx \quad \text{-------[4-a]}$$

(a は 0 でない任意の実数)

$$\int_0^{\infty}\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{ch}x}{\mathrm{cha}x}\right)dx = a\int_0^{\infty}\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{sha}x}\right)dx \quad \text{-------[4-b]}$$

(a は|a|が 1 より大きい任意の実数)

$$\int_0^\infty \tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{chx}}{\mathrm{shax}}\right)dx \;=a\int_0^\infty \tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{shx}}{\mathrm{chax}}\right)dx \qquad ------[5\text{-}a]$$

(a は|a|が 1 より大きい任意の実数)

$$\int_0^\infty \tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{cosx}}{\mathrm{shax}}\right)dx \;=a\int_0^\infty \mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{sinx}}{\mathrm{chax}}\right)dx \qquad ------[5\text{-}b]$$

(a は 0 でない任意の実数)

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{sinx}}{\mathrm{shax}}dx \;=\mathrm{sh}(\pi/(2a))\int_0^\infty \frac{\mathrm{cosx}}{\mathrm{chax}}dx \qquad -------[6\text{-}a]$$

(a は 0 でない任意の実数)

$$\int_0^\infty \frac{x\cdot \mathrm{sinx}}{\mathrm{chax}-\mathrm{cosx}}dx \;=2\int_0^\infty \frac{x\cdot \mathrm{sinx}}{\mathrm{chax}+\mathrm{cosx}}dx \qquad -----[7\text{-}a]$$

(a は 0 でない任意の実数)

$$\int_0^\infty x\left(1-\frac{\mathrm{shax}}{\mathrm{chax}-\mathrm{chx}}\right)dx \;=2\int_0^\infty x\left(-1+\frac{\mathrm{shax}}{\mathrm{chax}+\mathrm{chx}}\right)dx \qquad ------[8\text{-}a]$$

(a は 1 より大きい任意の実数)

$$\int_0^\infty x\left(1-\frac{\mathrm{shax}}{\mathrm{chax}-\mathrm{cosx}}\right)dx \;=2\int_0^\infty x\left(-1+\frac{\mathrm{shax}}{\mathrm{chax}+\mathrm{cosx}}\right)dx \qquad ------[8\text{-}b]$$

(a は 0 より大きい任意の実数)

$$\int_0^\infty \left\{-ax+\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{thax}}{\mathrm{thx}}\right)\right\}dx \;=2\int_0^\infty \{ax-\mathrm{th}^{-1}(\mathrm{thx}\cdot\mathrm{thax})\}dx \quad ---[9\text{-}a]$$

(a は|a|が 1 より小さい任意の実数)

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

上記五つの青色式が得られた。これまでと同類の方法で導出された。今回の式も任意の a(条件付き)で成り立つので、恒等式である。

これらは理論的に導出したが、念のため、Wolfram Alpha や Excel を使って数値実験でも正しいことを確認している。

最後に、想うことや気付いた点など述べておく。

****

●[E8] と今回の[E9], [E10]を並べよう。

$$2a^2\left\{\frac{1}{(1^2+a^2)}+\frac{1}{3(3^2+a^2)}+\frac{1}{5(5^2+a^2)}+\frac{1}{7(7^2+a^2)}+\cdot\cdot\right\}=\int_0^\infty \mathrm{sinx}\cdot\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{ch}(x/a)}\right)dx \quad ---- [E8]$$

(a は 0 でない任意の実数)

$$a^2\left\{\frac{1}{(1^2+a^2)}+\frac{1}{2(2^2+a^2)}+\frac{1}{3(3^2+a^2)}+\frac{1}{4(4^2+a^2)}+\cdot\ \cdot\right\}=\int_0^\infty \mathrm{sinx}\cdot\log\left(\frac{1}{1-e^{(-x/a)}}\right)dx \quad \text{---- [E9]}$$

(a は 0 より大きい任意の実数)

$$a^2\left\{\frac{1}{(1^2+a^2)}-\frac{1}{2(2^2+a^2)}+\frac{1}{3(3^2+a^2)}-\frac{1}{4(4^2+a^2)}+-\cdot\ \cdot\right\}=\int_0^\infty \mathrm{sinx}\cdot\log\left(1+e^{(-x/a)}\right)dx \quad \text{--- [E10]}$$

(a は 0 より大きい任意の実数)

[E9]と[E10]を足せば[E8]が得られることは左辺を見るとすぐわかる。また右辺は、$2\mathrm{th}^{-1}(b/a)=\log\{(a+b)/(a-b)\}$という公式($|b/a|<1$)を使えば、容易である。

ただし、上記の式たちは下式[E1]のように<u>明示的な値（左辺）では求まらない</u>。なぜなら、それはζ(3)に関係しているから。

さて、明示的な値が左辺に見える下式[E1]はＬ(1)に関係している。a を 0 に近づけるとπ/4 になることは、左辺と真ん中を a で割って a->0 とすることでわかる！ Ｌ(1)＝1 −1/3 +1/5 −1/7 +−・・＝π/4

$$\frac{a\pi/2}{\mathrm{ch}(a\pi/2)}=2a\left\{\frac{1}{1^2+a^2}-\frac{3}{3^2+a^2}+\frac{5}{5^2+a^2}-\frac{7}{7^2+a^2}+-\cdot\ \cdot\right\}=\int_0^\infty\frac{\mathrm{cosx}}{\mathrm{ch}(x/a)}dx \quad \text{---[E1]}$$

(a は 0 より大きい任意の実数)

●[E6]を眺めたい。

$$a\left\{\frac{1}{1^2+a^2}-\frac{2}{2^2+a^2}+\frac{3}{3^2+a^2}-\frac{4}{4^2+a^2}+-\cdot\ \cdot\right\}=\int_0^\infty\frac{\mathrm{cosx}}{1+e^{(x/a)}}dx \qquad \text{-----[E6]}$$

(a は 0 より大きい任意の実数)

一つの上での考察から、この式は明示的な値で<u>求まるはず</u>である！

前にも言及したが、この[E6]の明示値が得られていないので気になっている。なんとかして求めたいが･･。明示的な値が得られたら、a->0 とすることで log2 が出るはずである。 log2＝1 −1/2 +1/3 −1/4 +1/5 −1/6 + − ･･

****

2024. 8. 17 杉岡幹生

＜参考文献＞

・「数学公式Ⅱ」（森口・宇田川・一松、岩波書店）

・「マグロウヒル　数学公式・数表ハンドブック」(Murray R. Spiegel 著、氏家勝巳訳、オーム社)

[改訂]

Rev1.01　[10-a]は自明とわかり削除した。