＜ 三角関数と双曲線関数の融合域　その７ ＞

新種と考えられる公式が四つ得られたので、下方に青色で示す。これまでの式と一緒に示した。

なお、以降において、双曲線関数 sinh, cosh, tanh はそれぞれ sh, ch, th と略記した。例えば、sh2a は sinh(2a)のことである。$\tan^{-1}$, th^{-1} はそれぞれ arctan, arctanh。log は自然対数。L(1)、L(2)、Z(2)は次のものである。

L(1)＝1 −1/3 +1/5 −1/7 +−・・＝π/4

L(2)＝1 $-1/3^2$ $+1/5^2$ $-1/7^2$ +−・・＝0.91596559・・＝カタランの定数

Z(2)＝(3/4)ζ(2)＝1 $+1/3^2$ $+1/5^2$ $+1/7^2$ ＋・・＝$\pi^2/8$

さらに Z(s)は、私が独自に使っているもので、Z(s)＝1 $+1/3^s$ $+1/5^s$ $+1/7^s$ ＋・・＝$(1-1/2^s)\zeta(s)$であり、本質的にζ(s)そのものである。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

＜ 積分式 ＞

$$\log2=((a^2+1)/2)\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{\mathrm{ch}ax+\cos x}dx \qquad \text{------[A3]}$$

(a は 0 でない任意の実数)

$$\log2=((a^2-1)/2)\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}ax+\mathrm{ch}x}dx \qquad \text{------[A5]}$$

(a は 1 より大きい任意の実数)

$$\pi=\int_0^{\infty}(1/a)\log\left(\frac{\mathrm{ch}x+\sin a}{\mathrm{ch}x-\sin a}\right)dx \qquad \text{------[B3]}$$

(a は $0<|a|\le\pi/2$ を満たす任意の実数。 $a\to0$ でも式は成立。)

$$L(1)=\pi/4=(a^2+1)\int_0^{\infty}\frac{\sin x\cdot\mathrm{sh}ax}{\mathrm{ch}2ax+\cos2x}dx \qquad \text{------[B4]}$$

(a は 0 より大きい任意の実数)

$$L(1)=\pi/4=(a^2-1)\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{sh}x\cdot\mathrm{sh}ax}{\mathrm{ch}2ax+\mathrm{ch}2x}dx \qquad \text{------[B6]}$$

(a は 1 より大きい任意の実数)

$$Z(2)=\pi^2/8=((a^2+1)/2)\int_0^{\infty}\tan^{-1}\left(\frac{\sin x}{\mathrm{sh}ax}\right)dx \qquad \text{-------[C8]}$$

(a は 0 より大きい任意の実数)

$$Z(2)=\pi^2/8=((a^2-1)/2)\int_0^{\infty}\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{sh}ax}\right)dx \qquad \text{-------[C10]}$$

(a は 1 より大きい任意の実数)

$$\zeta(2)=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdot\cdot=\pi^2/6=((a^2-1)/(2a))\int_0^\infty\{ax-\log(2(\mathrm{ch}ax-\mathrm{ch}x))\}dx$$ ---[C13]

(a は 1 より大きい任意の実数)

$$\zeta(2)=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdot\cdot=\pi^2/6=((a^2+1)/(2a))\int_0^\infty\{ax-\log(2(\mathrm{ch}ax-\cos x))\}dx$$ ---[C15]

(a は 0 より大きい任意の実数)

$$L(2)=((a^2-1)/2)\int_0^\infty \tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}ax}\right)dx$$ --------[D7]

(a は、|a|が 1 より大きい任意の実数)

$$L(2)=((a^2+1)/4)\int_0^\infty \log\left(\frac{\mathrm{ch}ax+\sin x}{\mathrm{ch}ax-\sin x}\right)dx$$ -------[D11]

(a は 0 でない任意の実数)

$$a(2\pi-a)/2=\int_0^\infty \log\left(\frac{\mathrm{ch}x-\cos a}{\mathrm{ch}x-1}\right)dx$$ ------[I a-1]

(a は 0≦a≦2π を満たす任意の実数)

$$\frac{\cos a}{1^3}+\frac{\cos 3a}{3^3}+\frac{\cos 5a}{5^3}+\frac{\cos 7a}{7^3}+\cdot\cdot=\int_0^\infty\left(\frac{x}{4}\right)\log\left(\frac{\mathrm{ch}x+\cos a}{\mathrm{ch}x-\cos a}\right)dx$$ ------[I a-2]

(a は任意の実数。cosa は cos(a) のこと)

$$\frac{\sin a}{1^2}+\frac{\sin 3a}{3^2}+\frac{\sin 5a}{5^2}+\frac{\sin 7a}{7^2}+\cdot\cdot=\int_0^\infty\left(\frac{1}{2}\right)\tan^{-1}\left(\frac{\sin a}{\mathrm{sh}x}\right)dx$$ -----[I a-3]

(a は任意の実数)

$$\frac{\sin a}{1^4}+\frac{\sin 3a}{3^4}+\frac{\sin 5a}{5^4}+\frac{\sin 7a}{7^4}+\cdot\cdot=\int_0^\infty\left(\frac{x^2}{4}\right)\tan^{-1}\left(\frac{\sin a}{\mathrm{sh}x}\right)dx$$ -----[I a-4]

(a は任意の実数)

$$\frac{\cos a}{1^5}+\frac{\cos 3a}{3^5}+\frac{\cos 5a}{5^5}+\frac{\cos 7a}{7^5}+\cdot\cdot=\int_0^\infty\left(\frac{x^3}{24}\right)\log\left(\frac{\mathrm{ch}x+\cos a}{\mathrm{ch}x-\cos a}\right)dx$$ ------[I a-5]

(a は任意の実数)

$$\frac{\sin a}{1^6}+\frac{\sin 3a}{3^6}+\frac{\sin 5a}{5^6}+\frac{\sin 7a}{7^6}+\cdot\cdot=\int_0^\infty\left(\frac{x^4}{48}\right)\tan^{-1}\left(\frac{\sin a}{\mathrm{sh}x}\right)dx$$ -----[I a-6]

(a は任意の実数)

$$\frac{\cos a}{1^7}+\frac{\cos 3a}{3^7}+\frac{\cos 5a}{5^7}+\frac{\cos 7a}{7^7}+\cdot\cdot=\int_0^\infty\left(\frac{x^5}{480}\right)\log\left(\frac{\mathrm{ch}x+\cos a}{\mathrm{ch}x-\cos a}\right)dx$$ ------[I a-7]

(a は任意の実数)

[ゼータの香りの漂う公式に関連した積分式]

$$\frac{a\pi/2}{\mathrm{ch}(a\pi/2)}=2a\left\{\frac{1}{1^2+a^2}-\frac{3}{3^2+a^2}+\frac{5}{5^2+a^2}-\frac{7}{7^2+a^2}+-\cdot\cdot\right\}=\int_0^\infty\frac{\cos x}{\mathrm{ch}(x/a)}dx \quad \text{---[E1]}$$

(a は 0 より大きい任意の実数)

$$(a\pi/2)\mathrm{th}(a\pi/2)=2a^2\left\{\frac{1}{1^2+a^2}+\frac{1}{3^2+a^2}+\frac{1}{5^2+a^2}+\frac{1}{7^2+a^2}+\cdot\cdot\right\}=\int_0^\infty\frac{\sin x}{\mathrm{sh}(x/a)}dx \quad \text{---[E2]}$$

(a は 0 より大きい任意の実数)

$$2a^2\left\{\frac{1}{1^2+a^2}-\frac{1}{3^2+a^2}+\frac{1}{5^2+a^2}-\frac{1}{7^2+a^2}+-\cdot\cdot\right\}=\int_0^\infty\frac{\sin x}{\mathrm{ch}(x/a)}dx \quad \text{---[E3]}$$

(a は 0 でない任意の実数)

$$1-\frac{a\pi}{\mathrm{sh}(a\pi)}=2a^2\left\{\frac{1}{1^2+a^2}-\frac{1}{2^2+a^2}+\frac{1}{3^2+a^2}-\frac{1}{4^2+a^2}+-\cdot\cdot\right\}=\int_0^\infty\sin x\{1-\mathrm{th}(x/(2a))\}dx \quad \text{---[E4]}$$

(a は 0 より大きい任意の実数)

$$\frac{a\pi}{\mathrm{th}(a\pi)}-1=2a^2\left\{\frac{1}{1^2+a^2}+\frac{1}{2^2+a^2}+\frac{1}{3^2+a^2}+\frac{1}{4^2+a^2}+\cdot\cdot\right\}=\int_0^\infty\sin x\left\{\frac{1}{\mathrm{th}(x/(2a))}-1\right\}dx \quad \text{---[E5]}$$

(a は 0 より大きい任意の実数)

$$2a\left\{\frac{1}{1^2+a^2}-\frac{2}{2^2+a^2}+\frac{3}{3^2+a^2}-\frac{4}{4^2+a^2}+-\cdot\cdot\right\}=\int_0^\infty\cos x\{1-\mathrm{th}(x/(2a))\}dx \quad \text{---[E6]}$$

(a は 0 より大きい任意の実数)

$$\left(\frac{\pi}{2}\right)\left\{1-\frac{1}{\mathrm{ch}(a\pi/2)}\right\}=2a^2\left\{\frac{1}{(1^2+a^2)}-\frac{1}{3(3^2+a^2)}+\frac{1}{5(5^2+a^2)}-\frac{1}{7(7^2+a^2)}+-\cdot\cdot\right\}$$

$$=\int_0^\infty\sin x\cdot\tan^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{sh}(x/a)}\right)dx \quad \text{----------[E7]}$$

(a は 0 より大きい任意の実数)

$$2a^2\left\{\frac{1}{(1^2+a^2)}+\frac{1}{3(3^2+a^2)}+\frac{1}{5(5^2+a^2)}+\frac{1}{7(7^2+a^2)}+\cdot\cdot\right\}=\int_0^\infty\sin x\cdot\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{ch}(x/a)}\right)dx \quad \text{----[E8]}$$

(a は 0 でない任意の実数)

＜(積分)変換公式 ＞

$$\int_0^\infty\left(1-\frac{\mathrm{sh}ax}{\mathrm{ch}ax+\cos x}\right)dx=a\int_0^\infty\frac{\sin x}{\mathrm{ch}ax+\cos x}dx \quad \text{-----[1-a]}$$

(a は 0 より大きい任意の実数)

$$\int_0^\infty\left(1-\frac{\mathrm{sh}ax}{\mathrm{ch}ax+\mathrm{ch}x}\right)dx=a\int_0^\infty\frac{\sin x}{\mathrm{ch}ax+\mathrm{ch}x}dx \quad \text{-----[1-b]}$$

(a は 1 より大きい任意の実数)

$$\int_0^\infty \frac{\cos x\cdot \mathrm{ch}ax}{\mathrm{ch}2ax+\cos 2x}dx = a\int_0^\infty \frac{\sin x\cdot \mathrm{sh}ax}{\mathrm{ch}2ax+\cos 2x}dx \qquad \text{-----[2-a]}$$

(a は 0 でない任意の実数)

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{ch}x\cdot \mathrm{ch}ax}{\mathrm{ch}2ax+\mathrm{ch}2x}dx = a\int_0^\infty \frac{\mathrm{sh}x\cdot \mathrm{sh}ax}{\mathrm{ch}2ax+\mathrm{ch}2x}dx \qquad \text{-----[2-b]}$$

(a は|a|が 1 より大きい任意の実数)

$$\int_0^\infty \{ax - \log(2(\mathrm{ch}ax - \mathrm{ch}x))\}dx = 2\int_0^\infty \{-ax + \log(2(\mathrm{ch}ax + \mathrm{ch}x))\}dx \quad \text{---[3-a]}$$

(a は 1 より大きい任意の実数)

$$\int_0^\infty \{ax - \log(2(\mathrm{ch}ax - \cos x))\}dx = 2\int_0^\infty \{-ax + \log(2(\mathrm{ch}ax + \cos x))\}dx \quad \text{---[3-b]}$$

(a は 0 より大きい任意の実数)

$$\int_0^\infty \log\left(\frac{\mathrm{ch}ax-\cos x}{\mathrm{ch}ax-\mathrm{ch}x}\right)dx = 2\int_0^\infty \log\left(\frac{\mathrm{ch}ax+\mathrm{ch}x}{\mathrm{ch}ax+\cos x}\right)dx \qquad \text{------[3-c]}$$

(a は|a|が 1 より大きい任意の実数)

$$\int_0^\infty \mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\cos x}{\mathrm{ch}ax}\right)dx = a\int_0^\infty \tan^{-1}\left(\frac{\sin x}{\mathrm{sh}ax}\right)dx \qquad \text{------[4-a]}$$

(a は 0 でない任意の実数)

$$\int_0^\infty \mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{ch}x}{\mathrm{ch}ax}\right)dx = a\int_0^\infty \mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{sh}ax}\right)dx \qquad \text{------[4-b]}$$

(a は|a|が 1 より大きい任意の実数)

$$\int_0^\infty \tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{ch}x}{\mathrm{sh}ax}\right)dx = a\int_0^\infty \tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}ax}\right)dx \qquad \text{------[5-a]}$$

(a は|a|が 1 より大きい任意の実数)

$$\int_0^\infty \tan^{-1}\left(\frac{\cos x}{\mathrm{sh}ax}\right)dx = a\int_0^\infty \mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\sin x}{\mathrm{ch}ax}\right)dx \qquad \text{------[5-b]}$$

(a は 0 でない任意の実数)

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{\mathrm{sh}ax}dx = \mathrm{sh}(\pi/(2a))\int_0^\infty \frac{\cos x}{\mathrm{ch}ax}dx \qquad \text{-------[6-a]}$$

(a は 0 でない任意の実数)

$$\int_0^\infty \frac{x\cdot \sin x}{\mathrm{ch}ax-\cos x}dx = 2\int_0^\infty \frac{x\cdot \sin x}{\mathrm{ch}ax+\cos x}dx \qquad \text{-----[7-a]}$$

(a は 0 でない任意の実数)

$$\int_0^\infty x\left(1-\frac{\mathrm{sha}x}{\mathrm{cha}x-\mathrm{ch}x}\right)dx = 2\int_0^\infty x\left(-1+\frac{\mathrm{sha}x}{\mathrm{cha}x+\mathrm{ch}x}\right)dx \quad \text{------[8-a]}$$

(a は 1 より大きい任意の実数)

$$\int_0^\infty x\left(1-\frac{\mathrm{sha}x}{\mathrm{cha}x-\cos x}\right)dx = 2\int_0^\infty x\left(-1+\frac{\mathrm{sha}x}{\mathrm{cha}x+\cos x}\right)dx \quad \text{------[8-b]}$$

(a は 0 より大きい任意の実数)

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

これら四つの青色式が得られた。

すぐ上の[8−a]と[8−b]は、[3−a]と[3−b]をそれぞれ a について微分して得られた。導出は簡単であるが、[3−〜]と比べて簡潔で美しいし、ふしぎな感じがともなっている。

[I a−6]と[I a−7]は、その周辺の[I a−〜]式の導出と類似の方法で得られた。

今回の四式も任意の a(条件付き)で成り立つので、恒等式である。

最後に、想うことや気付いた点など述べておく。

****

●[I a−6]と[I a−7]を再掲。

$$\frac{\sin a}{1^6}+\frac{\sin 3a}{3^6}+\frac{\sin 5a}{5^6}+\frac{\sin 7a}{7^6}+\cdot\cdot=\int_0^\infty\left(\frac{x^4}{48}\right)\tan^{-1}\left(\frac{\sin a}{\mathrm{sh}x}\right)dx \quad \text{----[I a−6]}$$

(a は任意の実数)

$$\frac{\cos a}{1^7}+\frac{\cos 3a}{3^7}+\frac{\cos 5a}{5^7}+\frac{\cos 7a}{7^7}+\cdot\cdot=\int_0^\infty\left(\frac{x^5}{480}\right)\log\left(\frac{\mathrm{ch}x+\cos a}{\mathrm{ch}x-\cos a}\right)dx \quad \text{-----[I a−7]}$$

(a は任意の実数)

[I a−6]の a にπ/2 を代入すると L(6)が得られ、[I a−7]の a に 0 を代入するとζ(7)が得られる。これは正体がよくわからないとされるゼータの非明示特殊値に一致する。よって上式は、それら興味ある値をも含むエネルギーに満ちた式となっている。

●[I a−2]と[I a−5]と[I a−7]を並べたい。

$$\frac{\cos a}{1^3}+\frac{\cos 3a}{3^3}+\frac{\cos 5a}{5^3}+\frac{\cos 7a}{7^3}+\cdot\cdot=\int_0^\infty\left(\frac{x}{4}\right)\log\left(\frac{\mathrm{ch}x+\cos a}{\mathrm{ch}x-\cos a}\right)dx \quad \text{-----[I a−2]}$$

(a は任意の実数。cosa は cos(a) のこと)

$$\frac{\cos a}{1^5}+\frac{\cos 3a}{3^5}+\frac{\cos 5a}{5^5}+\frac{\cos 7a}{7^5}+\cdot\cdot=\int_0^\infty\left(\frac{x^3}{24}\right)\log\left(\frac{\mathrm{ch}x+\cos a}{\mathrm{ch}x-\cos a}\right)dx \quad \text{-----[I a−5]}$$

(a は任意の実数)

$$\frac{\cos a}{1^7}+\frac{\cos 3a}{3^7}+\frac{\cos 5a}{5^7}+\frac{\cos 7a}{7^7}+\cdot\ \cdot=\int_0^\infty\left(\frac{x^5}{480}\right)\log\left(\frac{\mathrm{ch}x+\cos a}{\mathrm{ch}x-\cos a}\right)dx \quad \text{-----[I a-7]}$$

(a は任意の実数)

これらを眺めると、右辺の log の部分が共通で、それに掛かる()内だけ違っている。全く面白い形をしている！なにかあると想わせるものがあるが、それは[I a-3]と[I a-4]と[I a-6]でも同じである。上方を眺めていただきたい。

●やはり、この地帯、三角関数と双曲線関数の融合域（二変数）はいろいろと公式が出る。この２年間数えきれないほどの公式を得た。それらは新種の式も多くあると考えられるが、発見というのはやはり心が躍る。岡潔は「発見の鋭い喜び」といったが、それと同じである。

昔は発見というのは天才のみが成し得るものだろうと思っていたが、自身を振り返って、その考えは完全に間違っている。発見はだれでもできる。そのコツは、数学者が行く化石発掘域とは違う化石産出地帯に足を踏みいれることである。

そんな地帯はあるのか？⇒たくさんある。数学はやりつくされて手つかずの領域など残っていないのでは？と思いがちだが、それは人間の錯覚である。実際は手つかずの領域だらけである。小学生でも化石を発見することがあるように、もし知られていない領域に入ったならば、化石はあちこちに露出していて、高校生でも主婦でも素手で拾うことができる。人間は小さい。

●[8-a]と[8-b]再掲。

$$\int_0^\infty x\left(1-\frac{\mathrm{sh}ax}{\mathrm{ch}ax-\mathrm{ch}x}\right)dx=2\int_0^\infty x\left(-1+\frac{\mathrm{sh}ax}{\mathrm{ch}ax+\mathrm{ch}x}\right)dx \quad \text{------[8-a]}$$

(a は 1 より大きい任意の実数)

$$\int_0^\infty x\left(1-\frac{\mathrm{sh}ax}{\mathrm{ch}ax-\cos x}\right)dx=2\int_0^\infty x\left(-1+\frac{\mathrm{sh}ax}{\mathrm{ch}ax+\cos x}\right)dx \quad \text{------[8-b]}$$

(a は 0 より大きい任意の実数)

これも二式をセットで見ると、余計にふしぎな感じがあって、美しいシンメトリーを成している。

****

2024.8.10 杉岡幹生

＜参考文献＞

・「数学公式Ⅱ」（森口・宇田川・一松、岩波書店）

・「マグロウヒル　数学公式・数表ハンドブック」（Murray R. Spiegel 著、氏家勝巳訳、オーム社）