＜ 三角関数と双曲線関数の融合域　その６ ＞

新種と考えられる積分式二つと変換公式一つが得られたので、下方に青色で示す。これまでの式と一緒に示した。積分式で同値関係で並列していた式は、紙幅の節約のため一方を削除した（式記号も一部変更）。

なお、以降において、双曲線関数 sinh, cosh, tanh はそれぞれ sh, ch, th と略記した。例えば、sh2a は sinh(2a)のことである。$\tan^{-1}$, th^{-1} はそれぞれ arctan, arctanh。log は自然対数。L(1)、L(2)、Z(2)は次のものである。

L(1)＝1 −1/3 +1/5 −1/7 +−・・＝π/4
L(2)＝1 $-1/3^2$ $+1/5^2$ $-1/7^2$ +−・・＝0.91596559・・＝カタランの定数
Z(2)＝(3/4)ζ(2)＝1 $+1/3^2$ $+1/5^2$ $+1/7^2$ +・・＝$\pi^2/8$

Z(s)は、私が独自に使っているもので、Z(s)＝1 $+1/3^s$ $+1/5^s$ $+1/7^s$ +・・＝$(1-1/2^s)$ζ(s)であり、本質的にζ(s)そのものである。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

＜ 積分式 ＞

$$\log 2=((a^2+1)/2)\int_0^\infty \frac{\sin x}{\text{ch}ax+\cos x}dx \qquad \text{-----[A3]}$$

（a は 0 でない任意の実数）

$$\log 2=((a^2-1)/2)\int_0^\infty \frac{\text{sh}x}{\text{ch}ax+\text{ch}x}dx \qquad \text{-----[A5]}$$

（a は 1 より大きい任意の実数）

$$\pi=\int_0^\infty (1/a)\log\left(\frac{\text{ch}x+\sin a}{\text{ch}x-\sin a}\right)dx \qquad \text{------[B3]}$$

（a は $0<|a|\le\pi/2$ を満たす任意の実数。 $a\to 0$ でも式は成立。）

$$L(1)=\pi/4=(a^2+1)\int_0^\infty \frac{\sin x\cdot\text{sh}ax}{\text{ch}2ax+\cos 2x}dx \qquad \text{------[B4]}$$

（a は 0 より大きい任意の実数）

$$L(1)=\pi/4=(a^2-1)\int_0^\infty \frac{\text{sh}x\cdot\text{sh}ax}{\text{ch}2ax+\text{ch}2x}dx \qquad \text{------[B6]}$$

（a は 1 より大きい任意の実数）

$$Z(2)=\pi^2/8=((a^2+1)/2)\int_0^\infty \tan^{-1}\left(\frac{\sin x}{\text{sh}ax}\right)dx \qquad \text{-------[C8]}$$

(a は 0 より大きい任意の実数)

$$Z(2)=\pi^2/8=((a^2-1)/2)\int_0^\infty \mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{sh}ax}\right)dx$$ -------[C10]

(a は 1 より大きい任意の実数)

$$\zeta(2)=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdot\cdot\ =\pi^2/6=((a^2-1)/(2a))\int_0^\infty\{ax-\log(2(\mathrm{ch}ax-\mathrm{ch}x))\}dx$$ ---[C13]

(a は 1 より大きい任意の実数)

$$\zeta(2)=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdot\cdot\ =\pi^2/6=((a^2+1)/(2a))\int_0^\infty\{ax-\log(2(\mathrm{ch}ax-\cos x))\}dx$$ ---[C15]

(a は 0 より大きい任意の実数)

$$L(2)=((a^2-1)/2)\int_0^\infty \tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}ax}\right)dx$$ --------[D7]

(a は、|a|が 1 より大きい任意の実数)

$$L(2)=((a^2+1)/4)\int_0^\infty \log\left(\frac{\mathrm{ch}ax+\sin x}{\mathrm{ch}ax-\sin x}\right)dx$$ ------[D11]

(a は 0 でない任意の実数)

$$a(2\pi-a)/2=\int_0^\infty \log\left(\frac{\mathrm{ch}x-\cos a}{\mathrm{ch}x-1}\right)dx$$ -----[I a-1]

(a は 0≦a≦2π を満たす任意の実数)

$$\frac{\cos a}{1^3}+\frac{\cos 3a}{3^3}+\frac{\cos 5a}{5^3}+\frac{\cos 7a}{7^3}+\cdot\cdot=\int_0^\infty\left(\frac{x}{4}\right)\log\left(\frac{\mathrm{ch}x+\cos a}{\mathrm{ch}x-\cos a}\right)dx$$ -----[I a-2]

(a は任意の実数。cosa は cos(a) のこと)

$$\frac{\sin a}{1^2}+\frac{\sin 3a}{3^2}+\frac{\sin 5a}{5^2}+\frac{\sin 7a}{7^2}+\cdot\cdot=\int_0^\infty\left(\frac{1}{2}\right)\tan^{-1}\left(\frac{\sin a}{\mathrm{sh}x}\right)dx$$ ----[I a-3]

(a は任意の実数)

$$\frac{\sin a}{1^4}+\frac{\sin 3a}{3^4}+\frac{\sin 5a}{5^4}+\frac{\sin 7a}{7^4}+\cdot\cdot=\int_0^\infty\left(\frac{x^2}{4}\right)\tan^{-1}\left(\frac{\sin a}{\mathrm{sh}x}\right)dx$$ ----[I a-4]

(a は任意の実数)

$$\frac{\cos a}{1^5}+\frac{\cos 3a}{3^5}+\frac{\cos 5a}{5^5}+\frac{\cos 7a}{7^5}+\cdot\cdot=\int_0^\infty\left(\frac{x^3}{24}\right)\log\left(\frac{\mathrm{ch}x+\cos a}{\mathrm{ch}x-\cos a}\right)dx$$ -----[I a-5]

(a は任意の実数)

[ゼータの香りの漂う公式に関連した積分式]

$$\frac{a\pi/2}{\mathrm{ch}(a\pi/2)}=2a\left\{\frac{1}{1^2+a^2}-\frac{3}{3^2+a^2}+\frac{5}{5^2+a^2}-\frac{7}{7^2+a^2}+-\cdot\cdot\right\}=\int_0^\infty\frac{\cos x}{\mathrm{ch}(x/a)}dx \quad ---[\mathrm{E1}]$$

(a は 0 より大きい任意の実数)

$$(a\pi/2)\mathrm{th}(a\pi/2)=2a^2\left\{\frac{1}{1^2+a^2}+\frac{1}{3^2+a^2}+\frac{1}{5^2+a^2}+\frac{1}{7^2+a^2}+\cdot\cdot\right\}=\int_0^\infty\frac{\sin x}{\mathrm{sh}(x/a)}dx \quad ---[\mathrm{E2}]$$

(a は 0 より大きい任意の実数)

$$2a^2\left\{\frac{1}{1^2+a^2}-\frac{1}{3^2+a^2}+\frac{1}{5^2+a^2}-\frac{1}{7^2+a^2}+-\cdot\cdot\right\}=\int_0^\infty\frac{\sin x}{\mathrm{ch}(x/a)}dx \quad ---[\mathrm{E3}]$$

(a は 0 でない任意の実数)

$$1-\frac{a\pi}{\mathrm{sh}(a\pi)}=2a^2\left\{\frac{1}{1^2+a^2}-\frac{1}{2^2+a^2}+\frac{1}{3^2+a^2}-\frac{1}{4^2+a^2}+-\cdot\cdot\right\}=\int_0^\infty\sin x\{1-\mathrm{th}(x/(2a))\}dx \quad ---[\mathrm{E4}]$$

(a は 0 より大きい任意の実数)

$$\frac{a\pi}{\mathrm{th}(a\pi)}-1=2a^2\left\{\frac{1}{1^2+a^2}+\frac{1}{2^2+a^2}+\frac{1}{3^2+a^2}+\frac{1}{4^2+a^2}+\cdot\cdot\right\}=\int_0^\infty\sin x\left\{\frac{1}{\mathrm{th}(x/(2a))}-1\right\}dx \quad ---[\mathrm{E5}]$$

(a は 0 より大きい任意の実数)

$$2a\left\{\frac{1}{1^2+a^2}-\frac{2}{2^2+a^2}+\frac{3}{3^2+a^2}-\frac{4}{4^2+a^2}+-\cdot\cdot\right\}=\int_0^\infty\cos x\{1-\mathrm{th}(x/(2a))\}dx \quad ---[\mathrm{E6}]$$

(a は 0 より大きい任意の実数)

$$\left(\frac{\pi}{2}\right)\left\{1-\frac{1}{\mathrm{ch}(a\pi/2)}\right\}=2a^2\left\{\frac{1}{(1^2+a^2)}-\frac{1}{3(3^2+a^2)}+\frac{1}{5(5^2+a^2)}-\frac{1}{7(7^2+a^2)}+-\cdot\cdot\right\}$$

$$=\int_0^\infty\sin x\cdot\tan^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{sh}(x/a)}\right)dx \quad ---------[\mathrm{E7}]$$

(a は 0 より大きい任意の実数)

$$2a^2\left\{\frac{1}{(1^2+a^2)}+\frac{1}{3(3^2+a^2)}+\frac{1}{5(5^2+a^2)}+\frac{1}{7(7^2+a^2)}+\cdot\cdot\right\}=\int_0^\infty\sin x\cdot\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{ch}(x/a)}\right)dx \quad ----[\mathrm{E8}]$$

(a は 0 でない任意の実数)

＜(積分)変換公式 ＞

$$\int_0^\infty\left(1-\frac{\mathrm{sh}ax}{\mathrm{ch}ax+\cos x}\right)dx=a\int_0^\infty\frac{\sin x}{\mathrm{ch}ax+\cos x}dx \quad -----[1\text{-}a]$$

(a は 0 より大きい任意の実数)

$$\int_0^{\infty}\left(1-\frac{\mathrm{shax}}{\mathrm{chax+chx}}\right)dx\ =a\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{\mathrm{chax+chx}}dx \qquad \text{-----[1-b]}$$

(a は 1 より大きい任意の実数)

$$\int_0^{\infty}\frac{\cos x\cdot\mathrm{chax}}{\mathrm{ch2ax}+\cos 2x}dx\ =a\int_0^{\infty}\frac{\sin x\cdot\mathrm{shax}}{\mathrm{ch2ax}+\cos 2x}dx \qquad \text{-----[2-a]}$$

(a は 0 でない任意の実数)

$$\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{chx}\cdot\mathrm{chax}}{\mathrm{ch2ax+ch2x}}dx\ =a\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{shx}\cdot\mathrm{shax}}{\mathrm{ch2ax+ch2x}}dx \qquad \text{-----[2-b]}$$

(a は|a|が 1 より大きい任意の実数)

$$\int_0^{\infty}\{ax-\log(2(\mathrm{chax}-\mathrm{chx}))\}dx\ =2\int_0^{\infty}\{-ax+\log(2(\mathrm{chax}+\mathrm{chx}))\}dx \quad \text{---[3-a]}$$

(a は 1 より大きい任意の実数)

$$\int_0^{\infty}\{ax-\log(2(\mathrm{chax}-\cos x))\}dx\ =2\int_0^{\infty}\{-ax+\log(2(\mathrm{chax}+\cos x))\}dx \quad \text{---[3-b]}$$

(a は 0 より大きい任意の実数)

$$\int_0^{\infty}\log\left(\frac{\mathrm{chax}-\cos x}{\mathrm{chax}-\mathrm{chx}}\right)dx\ =2\int_0^{\infty}\log\left(\frac{\mathrm{chax}+\mathrm{chx}}{\mathrm{chax}+\cos x}\right)dx \qquad \text{------[3-c]}$$

(a は|a|が 1 より大きい任意の実数)

$$\int_0^{\infty}\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\cos x}{\mathrm{chax}}\right)dx\ =a\int_0^{\infty}\tan^{-1}\left(\frac{\sin x}{\mathrm{shax}}\right)dx \qquad \text{------[4-a]}$$

(a は 0 でない任意の実数)

$$\int_0^{\infty}\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{chx}}{\mathrm{chax}}\right)dx\ =a\int_0^{\infty}\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{shx}}{\mathrm{shax}}\right)dx \qquad \text{------[4-b]}$$

(a は|a|が 1 より大きい任意の実数)

$$\int_0^{\infty}\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{chx}}{\mathrm{shax}}\right)dx\ =a\int_0^{\infty}\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{shx}}{\mathrm{chax}}\right)dx \qquad \text{------[5-a]}$$

(a は|a|が 1 より大きい任意の実数)

$$\int_0^{\infty}\tan^{-1}\left(\frac{\cos x}{\mathrm{shax}}\right)dx\ =a\int_0^{\infty}\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\sin x}{\mathrm{chax}}\right)dx \qquad \text{------[5-b]}$$

(a は 0 でない任意の実数)

$$\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{sinx}}{\mathrm{shax}}\mathrm{dx}\ =\mathrm{sh}(\pi/(2a))\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{cosx}}{\mathrm{chax}}\mathrm{dx}\qquad\text{--------[6-a]}$$

(a は 0 でない任意の実数)

$$\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{x \cdot sinx}}{\mathrm{chax-cosx}}\mathrm{dx}\ =2\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{x \cdot sinx}}{\mathrm{chax+cosx}}\mathrm{dx}\qquad\text{-----[7-a]}$$

(a は 0 でない任意の実数)

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

これら青色式が得られた。

最後の[7-a]は簡明で美しい！ これは、昨年末に出していた式でまだ表に出していなかった式を使って導出した。[7-a]は変換公式と捉えられるが、任意の a(0 以外)で成り立つので恒等式でもある。

[E7]、[E8]は、前回の証明の類似の方法で出した。

[7-a]の導出の流れをすこし述べる。昨年末に、私は次の二式を導出していた。

$$\zeta(2)/2=\pi^2/12=(a^2+1)\int_0^{\infty}\{x/2-\tan^{-1}\left(\mathrm{th}(ax/2)\tan(x/2)\right)\}dx\qquad\text{---}[\alpha]$$

(a は 0 より大きい任意の実数)

$$\zeta(2)=\pi^2/6=(a^2+1)\int_0^{\infty}\left\{-x/2+\tan^{-1}\left(\frac{\tan(x/2)}{\mathrm{th}(ax/2)}\right)\right\}dx\qquad\text{---}[\beta]$$

(a は 0 より大きい任意の実数)

この二式を得ていたが、右辺の積分計算は Wolfram Alpha にとっても難解なのか、具体的な a の値で数値検証を試みても「制限時間オーバー」のメッセージが出て、検証が不十分であった。式は正しいのだが、数値検証ができないので、そのまま放置していた。

しかし、上記二式から容易に (a^2+1) は消せるのでそれを実行し、変換公式を出して、その両辺を a で微分することを思いついた。そうすれば式も簡明になり、数値検証できる形になるのではないか？と予想し、それを実行して[7-a]を得た。

そして予想した通り、[7-a]は Wolfram Alpha で数値検証できるとわかり、いくつかの a で検証し問題ないことを確かめた。導出の流れは、このようなものである。

以上。

最後に、想うことや気付いた点など述べておく。

****

●[E7]、[E8]を再掲。

$$\left(\frac{\pi}{2}\right)\left\{1-\frac{1}{\mathrm{ch}(a\pi/2)}\right\}=2a^2\left\{\frac{1}{(1^2+a^2)}-\frac{1}{3(3^2+a^2)}+\frac{1}{5(5^2+a^2)}-\frac{1}{7(7^2+a^2)}+-\cdot\ \cdot\right\}$$

$$=\int_0^\infty \sin x\cdot\tan^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{sh}(x/a)}\right)dx \qquad \text{---------- [E7]}$$

(a は 0 より大きい任意の実数)

$$2a^2\left\{\frac{1}{(1^2+a^2)}+\frac{1}{3(3^2+a^2)}+\frac{1}{5(5^2+a^2)}+\frac{1}{7(7^2+a^2)}+\cdot\ \cdot\right\}=\int_0^\infty \sin x\cdot\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{ch}(x/a)}\right)dx \quad \text{---- [E8]}$$

(a は 0 でない任意の実数)

右辺積分式を除いて、これらはゼータの香りの漂う公式である。

[E7]では、左辺＝真ん中式で、両辺 a^2 で割って a を 0 に近づけていくと、ロピタルの定理から、

$1-1/3^3+1/5^3-1/7^3+-\cdot\cdot=L(3)=\pi^3/32$

が得られる。

[E8]は、明示的な値では出ない。なぜなら、それは<u>ζ(3)に関係</u>しているから。

このように上記両式は、ゼータ特殊値も包含している。

そして今回、これらゼータの香りの漂う公式が、上記のような積分式で表現できると分かったのである。

両方の積分式を比べると、<u>形が似ていて</u>面白い。

●[7−a]を再掲。

$$\int_0^\infty \frac{x\cdot\sin x}{\mathrm{cha}x-\cos x}dx=2\int_0^\infty \frac{x\cdot\sin x}{\mathrm{cha}x+\cos x}dx \qquad \text{-----[7-a]}$$

(a は 0 でない任意の実数)

シンプルでなんともよい式である。

上方での[α]や[β]という複雑な感じの式の奥に、このような綺麗な式が隠れているとは想像していなかった。

****

2024.8.03 杉岡幹生

＜参考文献＞

・「数学公式Ⅱ」（森口・宇田川・一松、岩波書店）

・「マグロウヒル　数学公式・数表ハンドブック」（Murray R. Spiegel 著、氏家勝巳訳、オーム社）