＜ 三角関数と双曲線関数の融合域　その４ ＞

----- 変換公式の導出 -----

変換公式というべき公式を見出したので、下方に**青色式**で示す。おそらく新種の公式と考えられる。これまで導出してきた一部の積分式とともに示した。

下記に関し、双曲線関数 sinh, cosh, tanh はそれぞれ sh, ch, th と略記した。例えば、sh2a は sinh(2a)のことである。$\tan^{-1}$, th^{-1} はそれぞれ arctan, arctanh。log は自然対数。L(1)、L(2)、Z(2)は次のものである。

$L(1)=1-1/3+1/5-1/7+-\cdots=\pi/4$

$L(2)=1-1/3^2+1/5^2-1/7^2+-\cdots=0.91596559\cdots=$ カタランの定数

$Z(2)=(3/4)\zeta(2)=1+1/3^2+1/5^2+1/7^2+\cdots=\pi^2/8$

Z(s)は、私が独自に使っているもので、$Z(s)=1+1/3^s+1/5^s+1/7^s+\cdots=(1-1/2^s)\zeta(s)$ であり、本質的に $\zeta(s)$ そのものである。

＝＝＝

＜ 積分式 ＞　（欠番があるのは、特殊ケースのものを省いたためである）

$$\log 2=((a^2+1)/2)\int_0^\infty \frac{\mathrm{sin}x}{\mathrm{ch}ax+\cos x}dx \qquad \text{------[A3]}$$

(a は 0 でない任意の実数)

$$\log 2=((a^2+1)/(2a))\int_0^\infty \left(1-\frac{\mathrm{sh}ax}{\mathrm{ch}ax+\cos x}\right)dx \qquad \text{------[A4]}$$

(a は 0 より大きい任意の実数)

$$\log 2=((a^2-1)/2)\int_0^\infty \frac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}ax+\mathrm{ch}x}dx \qquad \text{------[A5]}$$

(a は 1 より大きい任意の実数)

$$\log 2=((a^2-1)/(2a))\int_0^\infty \left(1-\frac{\mathrm{sh}ax}{\mathrm{ch}ax+\mathrm{ch}x}\right)dx \qquad \text{------[A6]}$$

(a は 1 より大きい任意の実数)

$$\pi=\int_0^\infty (1/a)\log\left(\frac{\mathrm{ch}x+\sin a}{\mathrm{ch}x-\sin a}\right)dx \qquad \text{------[B3]}$$

(a は $0<|a|\le\pi/2$ を満たす任意の実数。 $a\to 0$ でも式は成立。)

$$L(1)=\pi/4=(a^2+1)\int_0^\infty \frac{\sin x\cdot\mathrm{sh}ax}{\mathrm{ch}2ax+\cos 2x}dx \qquad \text{------[B4]}$$

(a は 0 より大きい任意の実数)

$$L(1)=\pi/4=((a^2+1)/a)\int_0^{\infty}\frac{\cos x\cdot \mathrm{ch}\,ax}{\mathrm{ch}2ax+\cos 2x}dx$$ -----[B5]

(a は 0 より大きい任意の実数)

$$L(1)=\pi/4=(a^2-1)\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{sh}x\cdot \mathrm{sh}\,ax}{\mathrm{ch}2ax+\mathrm{ch}2x}dx$$ -----[B6]

(a は 1 より大きい任意の実数)

$$L(1)=\pi/4=((a^2-1)/a)\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{ch}x\cdot \mathrm{ch}\,ax}{\mathrm{ch}2ax+\mathrm{ch}2x}dx$$ -----[B7]

(a は 1 より大きい任意の実数)

$$Z(2)=\pi^2/8=((a^2+1)/2)\int_0^{\infty}\tan^{-1}\left(\frac{\sin x}{\mathrm{sh}\,ax}\right)dx$$ -------[C8]

(a は 0 より大きい任意の実数)

$$Z(2)=\pi^2/8=((a^2+1)/(4a))\int_0^{\infty}\log\left(\frac{\mathrm{ch}\,ax+\cos x}{\mathrm{ch}\,ax-\cos x}\right)dx$$ -------[C9]

(a は 0 より大きい任意の実数)

$$Z(2)=\pi^2/8=((a^2-1)/2)\int_0^{\infty}\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{sh}\,ax}\right)dx$$ -------[C10]

(a は 1 より大きい任意の実数)

$$Z(2)=\pi^2/8=((a^2-1)/(4a))\int_0^{\infty}\log\left(\frac{\mathrm{ch}\,ax+\mathrm{ch}x}{\mathrm{ch}\,ax-\mathrm{ch}x}\right)dx$$ -------[C12]

(a は 1 より大きい任意の実数)

$$\zeta(2)=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdot\cdot=\pi^2/6=((a^2-1)/(2a))\int_0^{\infty}\left\{ax-\log\left(2(\mathrm{ch}\,ax-\mathrm{ch}x)\right)\right\}dx$$ ---[C13]

(a は 1 より大きい任意の実数)

$$\zeta(2)/2=1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+-\cdot\cdot=\pi^2/12=((a^2-1)/(2a))\int_0^{\infty}\left\{-ax+\log\left(2(\mathrm{ch}\,ax+\mathrm{ch}x)\right)\right\}dx$$ --[C14]

(a は 1 より大きい任意の実数)

$$\zeta(2)=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdot\cdot=\pi^2/6=((a^2+1)/(2a))\int_0^{\infty}\left\{ax-\log\left(2(\mathrm{ch}\,ax-\cos x)\right)\right\}dx$$ ---[C15]

(a は 0 より大きい任意の実数)

$$\zeta(2)=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdot\cdot=\pi^2/6=((a^2+1)/a)\int_0^{\infty}\left\{-ax+\log\left(2(\mathrm{ch}\,ax+\cos x)\right)\right\}dx$$ ----[C16]

(a は 0 より大きい任意の実数)

$$L(2)=((a^2-1)/2)\int_0^{\infty}\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}ax}\right)dx \qquad \text{--------[D7]}$$

(a は、|a|が 1 より大きい任意の実数)

$$L(2)=((a^2+1)/(2a))\int_0^{\infty}\tan^{-1}\left(\frac{\cos x}{\mathrm{sh}ax}\right)dx \qquad \text{--------[D9]}$$

(a は 0 でない任意の実数)

$$L(2)=((a^2-1)/(2a))\int_0^{\infty}\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{ch}x}{\mathrm{sh}ax}\right)dx \qquad \text{--------[D10]}$$

(a は、|a|が 1 より大きい任意の実数)

$$L(2)=((a^2+1)/4)\int_0^{\infty}\log\left(\frac{\mathrm{ch}ax+\sin x}{\mathrm{ch}ax-\sin x}\right)dx \qquad \text{------[D11]}$$

(a は 0 でない任意の実数)

＜(積分)変換公式 ＞

$$\int_0^{\infty}\left(1-\frac{\mathrm{sh}ax}{\mathrm{ch}ax+\cos x}\right)dx=a\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{\mathrm{ch}ax+\cos x}dx \qquad \text{-----[1-a]}$$

(a は 0 より大きい任意の実数)

$$\int_0^{\infty}\left(1-\frac{\mathrm{sh}ax}{\mathrm{ch}ax+\mathrm{ch}x}\right)dx=a\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{\mathrm{ch}ax+\mathrm{ch}x}dx \qquad \text{-----[1-b]}$$

(a は 1 より大きい任意の実数)

$$\int_0^{\infty}\frac{\cos x\cdot\mathrm{ch}ax}{\mathrm{ch}2ax+\cos 2x}dx=a\int_0^{\infty}\frac{\sin x\cdot\mathrm{sh}ax}{\mathrm{ch}2ax+\cos 2x}dx \qquad \text{-----[2-a]}$$

(a は 0 でない任意の実数)

$$\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{ch}x\cdot\mathrm{ch}ax}{\mathrm{ch}2ax+\mathrm{ch}2x}dx=a\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{sh}x\cdot\mathrm{sh}ax}{\mathrm{ch}2ax+\mathrm{ch}2x}dx \qquad \text{-----[2-b]}$$

(a は|a|が 1 より大きい任意の実数)

$$\int_0^{\infty}\{ax-\log(2(\mathrm{ch}ax-\mathrm{ch}x))\}dx=2\int_0^{\infty}\{-ax+\log(2(\mathrm{ch}ax+\mathrm{ch}x))\}dx \quad \text{---[3-a]}$$

(a は 1 より大きい任意の実数)

$$\int_0^\infty \{ax - \log(2(\mathrm{ch}ax - \cos x))\}dx \;=2\int_0^\infty \{-ax + \log(2(\mathrm{ch}ax + \cos x))\}dx \quad \text{---[3-b]}$$

(a は 0 より大きい任意の実数)

$$\int_0^\infty \log\left(\frac{\mathrm{ch}ax-\cos x}{\mathrm{ch}ax-\mathrm{ch}x}\right)dx \;=2\int_0^\infty \log\left(\frac{\mathrm{ch}ax+\mathrm{ch}x}{\mathrm{ch}ax+\cos x}\right)dx \quad \text{-------[3-c]}$$

(a は|a|が 1 より大きい任意の実数)

$$\int_0^\infty \mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\cos x}{\mathrm{ch}ax}\right)dx \;=a\int_0^\infty \tan^{-1}\left(\frac{\sin x}{\mathrm{sh}ax}\right)dx \quad \text{------[4-a]}$$

(a は 0 でない任意の実数)

$$\int_0^\infty \mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{ch}x}{\mathrm{ch}ax}\right)dx \;=a\int_0^\infty \mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{sh}ax}\right)dx \quad \text{------[4-b]}$$

(a は|a|が 1 より大きい任意の実数)

$$\int_0^\infty \tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{ch}x}{\mathrm{sh}ax}\right)dx \;=a\int_0^\infty \tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}ax}\right)dx \quad \text{-------[5-a]}$$

(a は|a|が 1 より大きい任意の実数)

$$\int_0^\infty \tan^{-1}\left(\frac{\cos x}{\mathrm{sh}ax}\right)dx \;=a\int_0^\infty \mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\sin x}{\mathrm{ch}ax}\right)dx \quad \text{------[5-b]}$$

(a は 0 でない任意の実数)

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

これら１１個の青色式が得られた。美しい式である。公式集にはない式のような気がするが、どうだろうか。そしてなにか基本的なものを感じる。

私は、これらを変換公式または積分変換公式と名づけたい。

じつはこれらは、上方の＜積分式＞から簡単に出る。例えば、[5-a]は、[D7]と[D10]から暗算で出る。また[5-b]も、[D9]と[D11]から出る。こちらは一見ややこしそうだが、$\mathrm{th}^{-1}(b/a)=(1/2)\log\{(a+b)/(a-b)\}$ （$|b/a|<1$）という公式集にある公式を使えば log が th^{-1} に変わり、即座に出る。

今回の残りの式も類似の方法で出る。暗算レベルである。

冒頭の積分式は、半年も前に得ていたものである。にもかかわらず、この変換公式に気づかなかった。あまりに遅い気づき！といえる。が、人は目の前に宝物があっても意識的にものを見ないとなかなか気づかない。

なお、一応念のため、Wolfram Alpha でいろいろ数値を代入してこれらの式が正しいことを検証している。

最後に、想うことや気付いた点など述べておく。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

● 青色式の最後の四式を並べよう。

$$\int_0^\infty \mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\cos x}{\mathrm{ch}\,ax}\right)dx = a\int_0^\infty \tan^{-1}\left(\frac{\sin x}{\mathrm{sh}\,ax}\right)dx \qquad \text{------[4-a]}$$

(a は 0 でない任意の実数)

$$\int_0^\infty \mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{ch}\,x}{\mathrm{ch}\,ax}\right)dx = a\int_0^\infty \mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}\,x}{\mathrm{sh}\,ax}\right)dx \qquad \text{------[4-b]}$$

(a は|a|が 1 より大きい任意の実数)

$$\int_0^\infty \tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{ch}\,x}{\mathrm{sh}\,ax}\right)dx = a\int_0^\infty \tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}\,x}{\mathrm{ch}\,ax}\right)dx \qquad \text{------[5-a]}$$

(a は|a|が 1 より大きい任意の実数)

$$\int_0^\infty \tan^{-1}\left(\frac{\cos x}{\mathrm{sh}\,ax}\right)dx = a\int_0^\infty \mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\sin x}{\mathrm{ch}\,ax}\right)dx \qquad \text{------[5-b]}$$

(a は 0 でない任意の実数)

今回の中では、これらがとくに気に入っている。まさに“変換公式“である。そして神秘的な対称性がにじみ出ている。個々のものを眺めてもふしぎさがあるが、四つをセットとして観ると、全体でシンメトリー（対称性）を成している感があって余計に面白い。これは何を意味しているのか？

●こんな基本的な感じの公式が地中に埋もれていたのだろうか。私がいまやっている領域は、三角関数と双曲線関数の融合域（二変数）だが、ここは人がほとんど足を踏みいれていない領域（洞窟）だと思う。なので、美しい鉱石や宝石が原石でそこら中に落ちている。重機（高等数学）など使わずとも、素手やスコップで採れる。

楕円積分、楕円関数、保型形式の巨大洞窟はまた別にあって、そことこちらは狭い通路でつながっている。が、ほとんどの人はこちらに来ていない。

●「セットでシンメトリー」という光景は、三角関数と双曲線関数の融合域（二変数）では何度も見てきた。この領域はいつもこんな感じで、万華鏡のように美しいことになっていて、出てくる公式たちは、いつも調和のとれたシンメトリーを表出してくれる。今回の式もそうなっている。

●「意識的にものを見ないとなかなか気づかない」と述べたが、これはいつもよく感じる。我々は見ているようで見ていない。それは「関心をもって対象を見る（観る）」と言い換えてもよい。しかしそれはなかなかやりにくく、よって、宝物が目の前にあってもスルーしてしまうことがよくある。

さらには関心の違いから、同じ対象を見ても、まったく違ったものと捉える！ということが数学史においてもよく起きている。例えば、ファニャノのレムニスケート曲線の研究に対し、オイラーはある微分方程式の解法へのヒントと観た。一方で、ガウスは同曲線の等分点の理論と観た。そして両者はまったく異なる数学を展開していった。後者はアーベルへと続く。

●なので、「数学とは、数学者個々人がある特定の関心から掘った“特定の関心のトンネル”なのだ！」ということができると思う。古今東西、無数の関心で掘られたトンネルがいま見ている数学と数学史であるのだけれども、地球は掘られていない部分が大部分だから、われわれが想像するよりはるかに多くのことが埋もれたままになっている。それは初等的なものでもそうだし、足元にもいろいろと落ちている。人は有名人のトンネルに行きたがるから、偏ったトンネルだけが成長してしまう。

ガウスやアーベルの関心からできたトンネルには多くの人がやってきて、太く広いものに整備された。

●[4−a] は次のようにも表現できる。他も同様。

$$\frac{1}{\sqrt{a}}\int_0^{\infty} \mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\cos x}{\mathrm{ch}\,ax}\right)dx \ =\sqrt{a}\int_0^{\infty} \tan^{-1}\left(\frac{\sin x}{\mathrm{sh}\,ax}\right)dx \qquad \text{-------[4−a]}$$

(a は 0 でない任意の実数)

数学者はこちらの表現を好むかもしれない。より対称性が鮮明に出ている気がする。しかし私は最初の形で十分である。注記：上記の形だと a が負の数のときにややこしいか？いや、まったく大丈夫だ！

●[3−c]を再掲。

$$\int_0^{\infty} \log\left(\frac{\mathrm{ch}\,ax-\cos x}{\mathrm{ch}\,ax-\mathrm{ch}\,x}\right)dx \ =2\int_0^{\infty} \log\left(\frac{\mathrm{ch}\,ax+\mathrm{ch}\,x}{\mathrm{ch}\,ax+\cos x}\right)dx \qquad \text{------[3−c]}$$

(a は|a|が 1 より大きい任意の実数)

この[3−c]もよい！ ふしぎが出ている。

●この２年ほどは、三角関数と双曲線関数の融合域の“二変数”域を探索してきた。そして今回の変換公式も、その二変数域から出た宝石たちである。

じつは三角関数と双曲線関数の融合域は、三変数に拡張できる。その三変数域の空間は超巨大である。二変数域は豊かな世界だが、その比ではなかろう。三変数はまだわずかしか手を付けていない。そこは鉱物の種類が多く密度が高いところである。

****

2024. 7. 6 杉岡幹生

＜参考文献＞

・「数学公式Ⅱ」（森口・宇田川・一松、岩波書店）