＜ 三角関数と双曲線関数の融合域　その３ ＞

新種と考えられる積分式が得られたので、下方に青色で示した。これまでのものと共に示したが、紙幅を節約したいので、任意の a がない特殊ケースのものは省いた。

また、これまで後半で[Ⅲa-～]で示していた式番号は、全体の整合性からすべて[Ⅰa-～] で置き直したので、ご了解いただきたい。

今回は本質的に同値のものも含めて示した。同値関係は赤字で記載。今後どう展開するかわからないので、一応両方とも示した。

下記に関し、双曲線関数 sinh, cosh, tanh はそれぞれ sh, ch, th と略記した。例えば、sh2a は sinh(2a)のことである。log は自然対数。$\tan^{-1}$, $\tanh^{-1}$ はそれぞれ arctan, arctanh。L(1)、L(2)、Z(2)は次のものである。

L(1)＝1 －1/3 ＋1/5 －1/7 ＋－・・＝π/4

L(2)＝1 $-1/3^2$ $+1/5^2$ $-1/7^2$ ＋－・・＝0.91596559・・＝カタランの定数

Z(2)＝(3/4)ζ(2)＝1 $+1/3^2$ $+1/5^2$ $+1/7^2$ ＋・・＝$\pi^2/8$

Z(s)は、私が独自に使っているもので、Z(s)＝1 $+1/3^s$ $+1/5^s$ $+1/7^s$ ＋・・＝$(1-1/2^s)$ζ(s)であり、本質的にζ(s)そのものである。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

＜ 積分式 ＞　（任意の a がない特殊ケースのものは省いた）

$$\log 2=((a^2+1)/2)\int_0^\infty \frac{\sin x}{\mathrm{ch}\,ax+\cos x}dx \qquad \text{------[A3]}$$

(a は 0 でない任意の実数)

$$\log 2=((a^2+1)/(2a))\int_0^\infty \left\{1-\left(\frac{\mathrm{sh}\,ax}{\mathrm{ch}\,ax+\cos x}\right)\right\}dx \qquad \text{------[A4]}$$

(a は 0 より大きい任意の実数)

$$\log 2=((a^2-1)/2)\int_0^\infty \frac{\mathrm{sh}\,x}{\mathrm{ch}\,ax+\mathrm{ch}\,x}dx \qquad \text{------[A5]}$$

(a は 1 より大きい任意の実数)

$$\log 2=((a^2-1)/(2a))\int_0^\infty \left\{1-\left(\frac{\mathrm{sh}\,ax}{\mathrm{ch}\,ax+\mathrm{ch}\,x}\right)\right\}dx \qquad \text{------[A6]}$$

(a は 1 より大きい任意の実数)

$$\pi=\int_0^\infty (1/a)\log\left(\frac{\mathrm{ch}\,x+\sin a}{\mathrm{ch}\,x-\sin a}\right)dx \qquad \text{------[B3]}$$

(a は $0<|a|\le\pi/2$ を満たす任意の実数。 $a\to 0$ でも式は成立。)

$$L(1)=\pi/4=(a^2+1)\int_0^{\infty}\frac{\sin x\cdot \mathrm{sh}ax}{\mathrm{ch}2ax+\cos 2x}dx$$ -----[B4]

(a は 0 より大きい任意の実数)

$$L(1)=\pi/4=((a^2+1)/a)\int_0^{\infty}\frac{\cos x\cdot \mathrm{ch}ax}{\mathrm{ch}2ax+\cos 2x}dx$$ -----[B5]

(a は 0 より大きい任意の実数)

$$L(1)=\pi/4=(a^2-1)\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{sh}x\cdot \mathrm{sh}ax}{\mathrm{ch}2ax+\mathrm{ch}2x}dx$$ -----[B6]

(a は 1 より大きい任意の実数)

$$L(1)=\pi/4=((a^2-1)/a)\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{ch}x\cdot \mathrm{ch}ax}{\mathrm{ch}2ax+\mathrm{ch}2x}dx$$ -----[B7]

(a は 1 より大きい任意の実数)

$$Z(2)=\pi^2/8=((a^2+1)/2)\int_0^{\infty}\tan^{-1}\left(\frac{\sin x}{\mathrm{sh}ax}\right)dx$$ -------[C8]

(a は 0 より大きい任意の実数)

$$Z(2)=\pi^2/8=((a^2+1)/(4a))\int_0^{\infty}\log\left(\frac{\mathrm{ch}ax+\cos x}{\mathrm{ch}ax-\cos x}\right)dx$$ -------[C9]

(a は 0 より大きい任意の実数)

$$Z(2)=\pi^2/8=((a^2-1)/2)\int_0^{\infty}\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{sh}ax}\right)dx$$ -------[C10]

(a は 1 より大きい任意の実数)

$$Z(2)=\pi^2/8=((a^2-1)/(4a))\int_0^{\infty}\log\left(\frac{\mathrm{ch}ax+\mathrm{ch}x}{\mathrm{ch}ax-\mathrm{ch}x}\right)dx$$ -------[C12]

(a は 1 より大きい任意の実数)

$$\zeta(2)=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdot\cdot=\pi^2/6=((a^2-1)/(2a))\int_0^{\infty}\left\{ax-\log\bigl(2(\mathrm{ch}ax-\mathrm{ch}x)\bigr)\right\}dx$$ ---[C13]

(a は 1 より大きい任意の実数)

$$\zeta(2)/2=1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+-\cdot\cdot=\pi^2/12=((a^2-1)/(2a))\int_0^{\infty}\left\{-ax+\log\bigl(2(\mathrm{ch}ax+\mathrm{ch}x)\bigr)\right\}dx$$ --[C14]

(a は 1 より大きい任意の実数)

$$\zeta(2)=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdot\cdot=\pi^2/6=((a^2+1)/(2a))\int_0^{\infty}\left\{ax-\log\bigl(2(\mathrm{ch}ax-\cos x)\bigr)\right\}dx$$ ---[C15]

(a は 0 より大きい任意の実数)

$$\zeta(2)=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdot\cdot=\pi^2/6=((a^2+1)/a)\int_0^\infty\left\{-ax+\log\left(2(\mathrm{ch}ax+\cos x)\right)\right\}dx$$ ----[C16]

(a は 0 より大きい任意の実数)

$$L(2)=((a^2-1)/2)\int_0^\infty \tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}ax}\right)dx$$ --------[D7]

(a は、|a|が 1 より大きい任意の実数)

$$L(2)=((a^2+1)/(2a))\int_0^\infty \tan^{-1}\left(\frac{\cos x}{\mathrm{sh}ax}\right)dx$$ --------[D9]

(a は 0 でない任意の実数)

$$L(2)=((a^2-1)/(2a))\int_0^\infty \tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{ch}x}{\mathrm{sh}ax}\right)dx$$ --------[D10]

(a は、|a|が 1 より大きい任意の実数)

$$L(2)=((a^2+1)/4)\int_0^\infty \log\left(\frac{\mathrm{ch}ax+\sin x}{\mathrm{ch}ax-\sin x}\right)dx$$ ------[D11]

(a は 0 でない任意の実数)

[上記のカテゴリーに入らないもの]

$$\frac{\pi/(2a)}{\mathrm{ch}(\pi/(2a))}=\int_0^\infty \frac{\cos x}{\mathrm{ch}ax}dx$$ --------[E1]

(a は 0 より大きい任意の実数)

$$(\pi/(2a))\mathrm{th}(\pi/(2a))=\int_0^\infty \frac{\sin x}{\mathrm{sh}ax}dx$$ --------[E2]

(a は 0 より大きい任意の実数)

$$2\left\{\frac{1}{(1a)^2+1}-\frac{1}{(3a)^2+1}+\frac{1}{(5a)^2+1}-\frac{1}{(7a)^2+1}+-\cdot\cdot\right\}=\int_0^\infty \frac{\sin x}{\mathrm{ch}ax}dx$$ -----[E3]

(a は 0 でない任意の実数)

$$a(2\pi-a)/2=\int_0^\infty \log\left(\frac{\mathrm{ch}x-\cos a}{\mathrm{ch}x-1}\right)dx$$ -----[Ⅰa-1]

(a は 0≦a≦2π を満たす任意の実数)

$$\frac{\cos a}{1^3}+\frac{\cos 3a}{3^3}+\frac{\cos 5a}{5^3}+\frac{\cos 7a}{7^3}+\cdot\cdot=\int_0^\infty\left(\frac{x}{4}\right)\log\left(\frac{\mathrm{ch}x+\cos a}{\mathrm{ch}x-\cos a}\right)dx \qquad \text{-----[I a-2]}$$

(a は任意の実数。cosa は cos(a) のこと)

$$\frac{\cos a}{1^3}+\frac{\cos 3a}{3^3}+\frac{\cos 5a}{5^3}+\frac{\cos 7a}{7^3}+\cdot\cdot=\int_0^\infty\frac{\cos a\cdot x^2\cdot \mathrm{sh}x}{2(\mathrm{ch}2x-\cos 2a)}dx \qquad \text{----[I a-2-2]}$$

(a は任意の実数)　注意:この式は[I a – 2]と本質的に同値である

$$\frac{\sin a}{1^2}+\frac{\sin 3a}{3^2}+\frac{\sin 5a}{5^2}+\frac{\sin 7a}{7^2}+\cdot\cdot=\int_0^\infty\frac{\sin a\cdot x\cdot \mathrm{ch}x}{\mathrm{ch}2x-\cos 2a}dx \qquad \text{-----[I a-3]}$$

(a は任意の実数)　注意:この式は[I a – 3 – 2]と本質的に同値である

$$\frac{\sin a}{1^2}+\frac{\sin 3a}{3^2}+\frac{\sin 5a}{5^2}+\frac{\sin 7a}{7^2}+\cdot\cdot=\int_0^\infty\left(\frac{1}{2}\right)\tan^{-1}\left(\frac{\sin a}{\mathrm{sh}x}\right)dx \qquad \text{----[I a-3-2]}$$

(a は任意の実数)

$$\frac{\sin a}{1^4}+\frac{\sin 3a}{3^4}+\frac{\sin 5a}{5^4}+\frac{\sin 7a}{7^4}+\cdot\cdot=\int_0^\infty\left(\frac{x^2}{4}\right)\tan^{-1}\left(\frac{\sin a}{\mathrm{sh}x}\right)dx \qquad \text{----[I a-4]}$$

(a は任意の実数)

$$\frac{\sin a}{1^4}+\frac{\sin 3a}{3^4}+\frac{\sin 5a}{5^4}+\frac{\sin 7a}{7^4}+\cdot\cdot=\int_0^\infty\frac{\sin a\cdot x^3\cdot \mathrm{ch}x}{6(\mathrm{ch}2x-\cos 2a)}dx \qquad \text{-----[I a-4-2]}$$

(a は任意の実数)　注意:この式は[I a – 4]と本質的に同値と考えられる

$$\frac{\cos a}{1^5}+\frac{\cos 3a}{3^5}+\frac{\cos 5a}{5^5}+\frac{\cos 7a}{7^5}+\cdot\cdot=\int_0^\infty\left(\frac{x^3}{24}\right)\log\left(\frac{\mathrm{ch}x+\cos a}{\mathrm{ch}x-\cos a}\right)dx \qquad \text{-----[I a-5]}$$

(a は任意の実数)

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

これら青色式のものが得られた。これらはゼータの非明示の特殊値に関係するものとなっている。

例えば一番最後の[I a−5]は、一次の保型形式ゼータＬ(χ, s)から生じる様々な実２次体ゼータ（ξ(s)も含まれる）の s=5 の非明示特殊値を含んだ式となっている。

よって、任意の実数ａで成り立つこれらの式たちは豊かな内容をもっている。

なお、今回の式も、Wolfram Alpha や Excel マクロを使っての数値検証で正しいことを確認している。

さてここで、変数定数倍−積分定理とそこから得られる系Ⅱを示しておく。

なお系Ⅰもあり、それはこれまで“補題Ⅰ”としていたが（ゼータの香りの・・(その３２８)）、変数定数倍−積分定理から自然に出てくるものなので、それも今後“系Ⅰ”と表現し直すことにする。

****

＜変数定数倍−積分定理＞（この頁で証明。名前はまだ付けていない）

任意の実関数 F(x) に対し 0～∞の範囲で積分した結果が有限の値となる場合、次の関係が成り立つ。ここで c は、c>0 の実定数である。

$$\int_0^{\infty} F(cx)dx = (1/c)\int_0^{\infty} F(x)dx$$

****

****

＜系Ⅱ＞

任意の実関数 F(x) に対し 0～∞の範囲で積分した結果が有限の値となり、且つ xF(x) と $x^2F'(x)$ が x→∞のとき 0 に収束する場合、次の関係が成り立つ。ここで c は、c>0 の実定数である。

$$\int_0^{\infty} x^2F''(cx)dx = (2/c^3)\int_0^{\infty} F(x)dx$$

注記： $F''(x)$はF(x)を２回微分したもの。

****

さて、今回導出した[Ⅰa-4]の証明を簡潔に示しておく。この系Ⅱを使って証明する。

$$\frac{\sin a}{1^4}+\frac{\sin 3a}{3^4}+\frac{\sin 5a}{5^4}+\frac{\sin 7a}{7^4}+\cdot\cdot = \int_0^{\infty}\left(\frac{x^2}{4}\right)\tan^{-1}\left(\frac{\sin a}{\mathrm{sh}x}\right)dx \quad \text{----[Ⅰa-4]}$$

(a は任意の実数)

==================================

＜ [Ⅰa-4]の証明 ＞

「ゼータの香りの・・（その３０７）」で提示した深フーリエ級数[5]を用いる。そこでは x の範囲は周期で限定していたが、その必要はなく x は任意の実数とできる。

$$\frac{\sin x}{e^a}+\frac{\sin 3x}{3e^{3a}}+\frac{\sin 5x}{5e^{5a}}+\frac{\sin 7x}{7e^{7a}}+\cdot\cdot = (1/2)\tan^{-1}\left(\frac{\sin x}{\mathrm{sh}a}\right) \quad \text{----[5]}$$

(x は任意の実数，a は a > 0 の任意の実数)

両辺に a^2 を掛けて、次を得る。

$$\frac{a^2\sin x}{e^a}+\frac{a^2\sin 3x}{3e^{3a}}+\frac{a^2\sin 5x}{5e^{5a}}+\frac{a^2\sin 7x}{7e^{7a}}+\cdot\cdot = \left(\frac{a^2}{2}\right)\tan^{-1}\left(\frac{\sin x}{\mathrm{sh}a}\right)$$

両辺を a について 0～∞まで積分して、次となる。

$$\int_0^{\infty}\left(\frac{a^2\sin x}{e^a}+\frac{a^2\sin 3x}{3e^{3a}}+\frac{a^2\sin 5x}{5e^{5a}}+\frac{a^2\sin 7x}{7e^{7a}}+\cdot\cdot\right)da = \int_0^{\infty}\left(\frac{a^2}{2}\right)\tan^{-1}\left(\frac{\sin x}{\mathrm{sh}a}\right)da$$

左辺は一様収束の点から項別積分できて、整理して次の[A]となる。

$$\frac{\sin x}{1}\int_0^\infty \frac{a^2}{e^a}da+\frac{\sin 3x}{3}\int_0^\infty \frac{a^2}{e^{3a}}da+\frac{\sin 5x}{5}\int_0^\infty \frac{a^2}{e^{5a}}da+\cdot\ \cdot=\int_0^\infty\left(\frac{a^2}{2}\right)\tan^{-1}\left(\frac{\sin x}{\operatorname{sh} a}\right)da \quad \text{--[A]}$$

さて、系Ⅱを使いたい。$F(a)=1/e^a$ とおくと、次のようになることに注意する。

$F(a)=1/e^a$,　$F'(a)=-1/e^a$,　$F''(a)=1/e^a$

上式[A]の左辺の各積分に<u>系Ⅱを適用</u>して、次を得る。

$$\frac{\sin x}{1^4}\int_0^\infty \frac{1}{e^a}da+\frac{\sin 3x}{3^4}\int_0^\infty \frac{1}{e^a}da+\frac{\sin 5x}{5^4}\int_0^\infty \frac{1}{e^a}da+\cdot\ \cdot=\left(\frac{1}{2}\right)\int_0^\infty\left(\frac{a^2}{2}\right)\tan^{-1}\left(\frac{\sin x}{\operatorname{sh} a}\right)da$$

ここで$\int_0^\infty \frac{1}{e^a}da$ は 1 だから左辺はすっきりし、（右辺も整えて）結局、次のようになる。

$$\frac{\sin x}{1^4}+\frac{\sin 3x}{3^4}+\frac{\sin 5x}{5^4}+\frac{\sin 7x}{7^4}+\cdot\ \cdot=\int_0^\infty\left(\frac{a^2}{4}\right)\tan^{-1}\left(\frac{\sin x}{\operatorname{sh} a}\right)da$$

(x は任意の実数)

<u>x と a を置き換えても</u>本質はなにも変わらないから、そのようにして目標[Ⅰa−4]に到達した。

$$\frac{\sin a}{1^4}+\frac{\sin 3a}{3^4}+\frac{\sin 5a}{5^4}+\frac{\sin 7a}{7^4}+\cdot\ \cdot=\int_0^\infty\left(\frac{x^2}{4}\right)\tan^{-1}\left(\frac{\sin a}{\operatorname{sh} x}\right)dx \quad \text{----[Ⅰa−4]}$$

(a は任意の実数)

終わり。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

このようにして導出できた。今回の他式も同様にして導出できる。
証明のポイントは、[5]の両辺に a^2 を掛けて<u>無理やり</u>系Ⅱが適用できる形にもっていく点にある。

最後に、想うことや気付いた点など述べておく。

****

●[Ⅰa−3−2]と[Ⅰa−4]を並べよう。

$$\frac{\sin a}{1^2}+\frac{\sin 3a}{3^2}+\frac{\sin 5a}{5^2}+\frac{\sin 7a}{7^2}+\cdot\ \cdot=\int_0^\infty\left(\frac{1}{2}\right)\tan^{-1}\left(\frac{\sin a}{\operatorname{sh} x}\right)dx \quad \text{----[Ⅰa−3−2]}$$

(a は任意の実数)

$$\frac{\sin a}{1^4}+\frac{\sin 3a}{3^4}+\frac{\sin 5a}{5^4}+\frac{\sin 7a}{7^4}+\cdot\ \cdot=\int_0^\infty\left(\frac{x^2}{4}\right)\tan^{-1}\left(\frac{\sin a}{\operatorname{sh} x}\right)dx \quad \text{----[Ⅰa−4]}$$

(a は任意の実数)

左辺の a にいろいろな値を代入することで、$L(\chi, s)$の s が 2 や 4 のケースの様々な虚 2 次体ゼータの特殊値が飛び出してくる。虚 2 次体ゼータの代表選手は $L(s)$ である。

よって、上式は深い内容を秘めた式なのだが、とにかく右辺がシンプルで綺麗である。また二式で積分内の形が<u>似ている</u>！　こんなところにも保型性が・・？

[Ｉa-3-2]と[Ｉa-4]でaに$\pi/2$を代入すると、左辺はそれぞれL(2)、L(4)となる。これらが無理数かどうかいまだ知られていない。

さて、右辺の積分の値は無理数だろうか？

もし「右辺の積分の値は、sina が０にならない任意の a で無理数となる！」などとなれば、L(2)、L(4)のみならず、L（χ，ｓ）の無数の虚２次体ゼータにおけるｓ＝2, ｓ＝4の非明示特殊値が全て無理数！！となって、この方面の研究が一挙に進展する。しかし証明は困難であろう。たぶん超越数なのだろうけれども。。

●一つ上の二式の左辺は、$Li_2(x)$とか$Li_4(x)$の多重対数関数（ポリ対数関数）の形に似ている。

$$\mathrm{Li}_2(\mathrm{x}) = \frac{\mathrm{x}}{1^2} + \frac{\mathrm{x}^2}{2^2} + \frac{\mathrm{x}^3}{3^2} + \frac{\mathrm{x}^4}{4^2} + \cdot\cdot$$

$$\mathrm{Li}_4(\mathrm{x}) = \frac{\mathrm{x}}{1^4} + \frac{\mathrm{x}^2}{2^4} + \frac{\mathrm{x}^3}{3^4} + \frac{\mathrm{x}^4}{4^4} + \cdot\cdot$$

それは、今回の青色式すべてにおいて同じようなことがいえる。多重対数関数は、べき級数つまりはフーリエ級数の形になっているから、なにか関係がありそうである。

●[Ｉa-3-2]と[Ｉa-4]の積分内に$\tan^{-1}$がある。じつは$\tan^{-1}x$は加法定理が成り立つ。それは公式集に載っている(「数学公式Ⅱ」（岩波書店）など)。

加法定理と聞くだけで、いろいろと妄想が湧き上がる・・。背後になにか理論が控えているのかもしれない。

● 次の式も眺めたい。

$$\frac{\cos a}{1^3} + \frac{\cos 3a}{3^3} + \frac{\cos 5a}{5^3} + \frac{\cos 7a}{7^3} + \cdot\cdot = \int_0^\infty \left(\frac{x}{4}\right) \log\left(\frac{\mathrm{ch}x+\cos a}{\mathrm{ch}x-\cos a}\right) dx \quad \text{------[I a-2]}$$

(a は任意の実数。cosa は cos(a) のこと)

$$\frac{\cos a}{1^5} + \frac{\cos 3a}{3^5} + \frac{\cos 5a}{5^5} + \frac{\cos 7a}{7^5} + \cdot\cdot = \int_0^\infty \left(\frac{x^3}{24}\right) \log\left(\frac{\mathrm{ch}x+\cos a}{\mathrm{ch}x-\cos a}\right) dx \quad \text{------[I a-5]}$$

(a は任意の実数)

これらも綺麗である。

右辺の log に着目。公式集にあるものと本質的に同じ公式　$\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)\log\left(\frac{a+b}{a-b}\right)$　$\left(\left|\frac{b}{a}\right|<1\right)$　を使うことで、log はth^{-1}に変換できる。そして公式集の別頁を見ると、$\mathrm{th}^{-1}x$にも加法定理がある。

****

2024. 6. 23　杉岡幹生

＜参考文献＞

・「数学公式Ⅱ」（森口・宇田川・一松、岩波書店）