＜ 三角関数と双曲線関数の融合域　その２ ＞

　これまで導出してきた積分式をまとめておきたい。下方で＜積分式＞として記した。なお、前々回で指摘したが、同値関係などで重なっていたものは削除し欠番とした（赤字でも記した）。

　これらの積分式は、こちらで示したフーリエ級数や深フーリエ級数にある操作を加えて、それに対しこの頁で証明した変数定数倍-積分定理を適用して導いた。証明の一例はゼータの香り・・（その３０２）を参照

　下記に関し、双曲線関数 sinh, cosh, tanh はそれぞれ sh, ch, th と略記した。例えば、sh2a は sinh(2a)のことである。log は自然対数。$\tan^{-1}$, $\tanh^{-1}$ はそれぞれ arctan, arctanh。L(1)、L(2)、Z(2)は次のものである。

$L(1)=1-1/3+1/5-1/7+-\cdots=\pi/4$

$L(2)=1-1/3^2+1/5^2-1/7^2+-\cdots=0.91596559\cdots$ ＝カタランの定数

$Z(2)=(3/4)\zeta(2)=1+1/3^2+1/5^2+1/7^2+\cdots=\pi^2/8$

　Z(s)は、私が独自に使っているもので、$Z(s)=1+1/3^s+1/5^s+1/7^s+\cdots=(1-1/2^s)\zeta(s)$ であり、本質的に $\zeta(s)$ そのものである。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

＜ 積分式 ＞

同値関係や既知等が判ったので、[C5]、[C6]、[C7]、[C11]、[D4]、[D5]、[D8]は削除し欠番とした。

$$\log 2=\int_0^\infty \frac{\sin x}{\mathrm{ch}x+\cos x}dx \qquad \text{------[A1]}$$

$$\log 2=\int_0^\infty \left\{1-\left(\frac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x+\cos x}\right)\right\}dx \qquad \text{------[A2]}$$

$$\log 2=((a^2+1)/2)\int_0^\infty \frac{\sin x}{\mathrm{ch}ax+\cos x}dx \qquad \text{------[A3]}$$

(a は 0 でない任意の実数)

$$\log 2=((a^2+1)/(2a))\int_0^\infty \left\{1-\left(\frac{\mathrm{sh}ax}{\mathrm{ch}ax+\cos x}\right)\right\}dx \qquad \text{------[A4]}$$

(a は 0 より大きい任意の実数)

$$\log 2=((a^2-1)/2)\int_0^\infty \frac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}ax+\mathrm{ch}x}dx \qquad \text{------[A5]}$$

(a は 1 より大きい任意の実数)

$$\log 2=((a^2-1)/(2a))\int_0^\infty \left\{1-\left(\frac{\mathrm{sh}ax}{\mathrm{ch}ax+\mathrm{ch}x}\right)\right\}dx \qquad \text{------[A6]}$$

(a は 1 より大きい任意の実数)

$$L(1)=\pi/4=2\int_0^{\infty}\frac{\sin x\cdot \operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}2x+\cos 2x}dx \qquad \text{-----[B1]}$$

$$L(1)=\pi/4=2\int_0^{\infty}\frac{\cos x\cdot \operatorname{ch}x}{\operatorname{ch}2x+\cos 2x}dx \qquad \text{-----[B2]}$$

$$\pi=\int_0^{\infty}(1/a)\log\left(\frac{\operatorname{ch}x+\sin a}{\operatorname{ch}x-\sin a}\right)dx \qquad \text{-----[B3]}$$

（a は $0<|a|\leq\pi/2$ を満たす任意の実数。 $a\to 0$ でも式は成立。）

$$L(1)=\pi/4=(a^2+1)\int_0^{\infty}\frac{\sin x\cdot \operatorname{sh}ax}{\operatorname{ch}2ax+\cos 2x}dx \qquad \text{-----[B4]}$$

（a は 0 より大きい任意の実数）

$$L(1)=\pi/4=((a^2+1)/a)\int_0^{\infty}\frac{\cos x\cdot \operatorname{ch}ax}{\operatorname{ch}2ax+\cos 2x}dx \qquad \text{-----[B5]}$$

（a は 0 より大きい任意の実数）

$$L(1)=\pi/4=(a^2-1)\int_0^{\infty}\frac{\operatorname{sh}x\cdot \operatorname{sh}ax}{\operatorname{ch}2ax+\operatorname{ch}2x}dx \qquad \text{------[B6]}$$

（a は 1 より大きい任意の実数）

$$L(1)=\pi/4=((a^2-1)/a)\int_0^{\infty}\frac{\operatorname{ch}x\cdot \operatorname{ch}ax}{\operatorname{ch}2ax+\operatorname{ch}2x}dx \qquad \text{------[B7]}$$

（a は 1 より大きい任意の実数）

$$\zeta(2)=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdot\cdot=\pi^2/6=\int_0^{\infty}\left\{x-\log\left(2(\operatorname{ch}x-\cos x)\right)\right\}dx \qquad \text{-----[C1]}$$

$$\zeta(2)/2=1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+-\cdot\cdot=\pi^2/12=\int_0^{\infty}\left\{\log\left(2(\operatorname{ch}x+\cos x)\right)-x\right\}dx \qquad \text{---[C2]}$$

$$Z(2)=\pi^2/8=(1/2)\int_0^{\infty}\log\left(\frac{\operatorname{ch}x+\cos x}{\operatorname{ch}x-\cos x}\right)dx \qquad \text{------[C3]}$$

$$Z(2)=\pi^2/8=\int_0^{\infty}\tan^{-1}\left(\frac{\sin x}{\operatorname{sh}x}\right)dx \qquad \text{------[C4]}$$

$$Z(2)=\pi^2/8=((a^2+1)/2)\int_0^{\infty}\tan^{-1}\left(\frac{\sin x}{\operatorname{sh}ax}\right)dx \qquad \text{------[C8]}$$

（a は 0 より大きい任意の実数）

$$Z(2)=\pi^2/8=((a^2+1)/(4a))\int_0^{\infty}\log\left(\frac{\mathrm{ch}ax+\cos x}{\mathrm{ch}ax-\cos x}\right)dx \qquad \text{-------[C9]}$$

(a は 0 より大きい任意の実数)

$$Z(2)=\pi^2/8=((a^2-1)/2)\int_0^{\infty}\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{sh}ax}\right)dx \qquad \text{-------[C10]}$$

(a は 1 より大きい任意の実数)

$$Z(2)=\pi^2/8=((a^2-1)/(4a))\int_0^{\infty}\log\left(\frac{\mathrm{ch}ax+\mathrm{ch}x}{\mathrm{ch}ax-\mathrm{ch}x}\right)dx \qquad \text{-------[C12]}$$

(a は 1 より大きい任意の実数)

$$\zeta(2)=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdot\cdot=\pi^2/6=((a^2-1)/(2a))\int_0^{\infty}\left\{ax-\log\left(2(\mathrm{ch}ax-\mathrm{ch}x)\right)\right\}dx \quad \text{---[C13]}$$

(a は 1 より大きい任意の実数)

$$\zeta(2)/2=1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+-\cdot\cdot=\pi^2/12=((a^2-1)/(2a))\int_0^{\infty}\left\{-ax+\log\left(2(\mathrm{ch}ax+\mathrm{ch}x)\right)\right\}dx \quad \text{--[C14]}$$

(a は 1 より大きい任意の実数)

$$\zeta(2)=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdot\cdot=\pi^2/6=((a^2+1)/(2a))\int_0^{\infty}\left\{ax-\log\left(2(\mathrm{ch}ax-\cos x)\right)\right\}dx \quad \text{---[C15]}$$

(a は 0 より大きい任意の実数)

$$\zeta(2)=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdot\cdot=\pi^2/6=((a^2+1)/a)\int_0^{\infty}\left\{-ax+\log\left(2(\mathrm{ch}ax+\cos x)\right)\right\}dx \quad \text{----[C16]}$$

(a は 0 より大きい任意の実数)

$$L(2)=(1/2)\int_0^{\infty}\log\left(\frac{\mathrm{ch}x+\sin x}{\mathrm{ch}x-\sin x}\right)dx \qquad \text{-------[D1]}$$

$$L(2)=\int_0^{\infty}\tan^{-1}\left(\frac{\cos x}{\mathrm{sh}x}\right)dx \qquad \text{--------[D2]}$$

$$L(2)=(1/2)\int_0^{\infty}\tan^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{sh}x}\right)dx \qquad \text{--------[D3]}$$

$$L(2)=(3/2)\int_0^{\infty}\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}2x}\right)dx \qquad \text{--------[D6]}$$

$$L(2)=((a^2-1)/2)\int_0^{\infty}\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{shx}}{\mathrm{chax}}\right)dx \qquad \text{--------[D7]}$$

(a は、|a|が 1 より大きい任意の実数)

$$L(2)=((a^2+1)/(2a))\int_0^{\infty}\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{cosx}}{\mathrm{shax}}\right)dx \qquad \text{--------[D9]}$$

(a は 0 でない任意の実数)

$$L(2)=((a^2-1)/(2a))\int_0^{\infty}\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{chx}}{\mathrm{shax}}\right)dx \qquad \text{--------[D10]}$$

(a は、|a|が 1 より大きい任意の実数)

$$L(2)=((a^2+1)/4)\int_0^{\infty}\log\left(\frac{\mathrm{chax+sinx}}{\mathrm{chax-sinx}}\right)dx \qquad \text{------[D11]}$$

(a は 0 でない任意の実数)

[上記のカテゴリーに入らないもの]

$$\frac{\pi/(2a)}{\mathrm{ch}(\pi/(2a))}=\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{cosx}}{\mathrm{chax}}dx \qquad \text{--------[E1]}$$

(a は 0 より大きい任意の実数)

$$(\pi/(2a))\mathrm{th}(\pi/(2a))=\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{sinx}}{\mathrm{shax}}dx \qquad \text{--------[E2]}$$

(a は 0 より大きい任意の実数)

$$2\left\{\frac{1}{(1a)^2+1}-\frac{1}{(3a)^2+1}+\frac{1}{(5a)^2+1}-\frac{1}{(7a)^2+1}+-\cdot\cdot\right\}=\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{sinx}}{\mathrm{chax}}dx \qquad \text{-----[E3]}$$

(a は 0 でない任意の実数)

次式は E1 と E2 から簡単に出る。参考。

$$\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{sinx}}{\mathrm{shax}}dx=\mathrm{sh}(\pi/(2a))\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{cosx}}{\mathrm{chax}}dx \qquad \text{--------[E1\&E2 から]}$$

(a は 0 でない任意の実数)

$$a(2\pi-a)/2=\int_0^{\infty}\log\left(\frac{\mathrm{chx-cosa}}{\mathrm{chx}-1}\right)dx \qquad \text{-----[Ⅲa-1]}$$

(a は 0 ≦ a ≦ 2 π を満たす任意の実数)

$$\frac{\mathrm{cosa}}{1^3}+\frac{\mathrm{cos3a}}{3^3}+\frac{\mathrm{co5a}}{5^3}+\frac{\mathrm{cos7a}}{7^3}+\cdot\cdot=\int_0^{\infty}\left(\frac{x}{4}\right)\log\left(\frac{\mathrm{chx+cosa}}{\mathrm{chx-cosa}}\right)dx \qquad \text{-----[Ⅲa-2]}$$

(a は任意の実数。cosa は cos(a) のこと)

$$\frac{\sin a}{1^2}+\frac{\sin 3a}{3^2}+\frac{\sin 5a}{5^2}+\frac{\sin 7a}{7^2}+\cdot\cdot=\int_0^{\infty}\frac{\sin a\cdot x\cdot \mathrm{ch}x}{\mathrm{ch}2x-\cos 2a}dx \qquad \text{-----[Ⅲa-3]}$$

(a は任意の実数)

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

最後に、想うことや気付いた点など述べておく。

****

●変数定数倍−積分定理は、この頁で３行で証明した。その簡明な定理を、こちらで示したフーリエ級数や深フーリエ級数にある操作を加えたものに適用すると、新種と思える積分式が続々と得られていった。これは何なんだ？！と思ったが、同時に、簡単なものは役に立つ！と思った。

●以前は、複雑な抽象的な数学が高級でよいもの・・と思っていた。数学書でよくある複雑な記号で埋め尽くされている数学がよい数学なんだろうと。。しかし、それは勘違いとわかった。

●私がいまやっているこの領域は、三角関数と双曲線関数の融合域（二変数）である。ここは対称性が極めて高い。ここでは見たことがない恒等式や積分式がたくさん出てくる。なにか保型形式の世界にも関係しているなと思い続けてきた。

ゼータの香りの・・(その３２１）の＜Ｆ１＞の右辺にη(イータ)関数が顔をのぞかせていて、そして、この＜Ｆ１＞は公式集（「数学公式Ⅱ」(岩波)）にあるランバート級数のある公式と本質的に同じものと気づいた。

三角関数と双曲線関数の融合域という地底湖は、保型形式という地底湖と、＜Ｆ１＞という狭い通路でつながっていた。

三角関数と双曲線関数の融合域（二変数）は三変数に拡張できるが、広すぎてそれはまだ。

****

2024.6.15 杉岡幹生

＜参考文献＞

・「数学公式Ⅱ」（森口・宇田川・一松、岩波書店）