＜　関数 S_Ax, C_Ax, S_Bx, C_Bx の定義、微分方程式 ＞

この＜ゼータの香り・・＞シリーズも長くその途上は山あり谷ありであったが、私としては地下の洞窟を探検してきたイメージがある。その洞窟は縦横に走っていていくつも枝分かれしていて、どちらに行くかはその時々の好みで決めてきた。

そして途中でひろった鉱石が、示してきた公式や予想や定理であるが、その鉱石も磨かずにその場に(原石のまま)放置してきたものも数多い。忘れてしまうものも多いが、気になっているものもある。１年半前の下記URL の結果はどうも引っかかっており、それを略して引用すると、以下の青字のものとなる。若干、追記した箇所もある。21510_x9.pdf (ikuro-kotaro.sakura.ne.jp)

＝＝＝

ゼータ香り式の母等式を扱っていると、sinx・shx や cosx・chx また sinx・chx や cosx・shx などの形がよく出現する。そのため、これらをそれぞれ独立の新関数として定義したい欲望にかられる。調べたところ、三角関数や双曲線あるいは楕円関数にすこし似たような規則が出た。今回は、新種の関数の定義と加法定理などの公式を紹介する。・・・

次のように四つの関数を新たに定義した。

$S_Ax=\sin x\cdot \mathrm{sh}x,\ \ C_Ax=\cos x\cdot \mathrm{ch}x,\ \ S_Bx=\sin x\cdot \mathrm{ch}x,\ \ C_Bx=\cos x\cdot \mathrm{sh}x$

なお、“S_Ax”は“$S_A(x)$”の意味である。よって、S_A2x は $S_A(2x)$のことである。また sh, ch はそれぞれ sinh, cosh を略したものである。

・・・

以下、分かった事実を列挙する。定義から書いていく。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

＜四つの関数の定義＞

$S_Ax=\sin x\cdot \mathrm{sh}x$

$C_Ax=\cos x\cdot \mathrm{ch}x$

$S_Bx=\sin x\cdot \mathrm{ch}x$

$C_Bx=\cos x\cdot \mathrm{sh}x$

＜２乗の加減＝１の公式＞

$C_A{}^2x-S_A{}^2x-(C_B{}^2x-S_B{}^2x)=1$　　　注記：わざわざ括弧（ ）をつけたのはその方が覚えやすいため。ただそれだけである。

＜２倍角の公式＞

$S_A2x=4S_Ax\cdot C_Ax=4S_Bx\cdot C_Bx$

$C_A2x=C_A{}^2x-S_A{}^2x+(C_B{}^2x-S_B{}^2x)=2(C_A{}^2x-S_A{}^2x)-1=2(C_B{}^2x-S_B{}^2x)+1$

$S_B2x=2S_Ax\cdot C_Bx+2C_Ax\cdot S_Bx$

$C_B2x=2C_Ax\cdot C_Bx-2S_Ax\cdot S_Bx$

＜加法定理＞

$$S_A(x+y)=S_Ax\cdot C_Ay+C_Ax\cdot S_Ay+S_Bx\cdot C_By+C_Bx\cdot S_By$$
$$S_A(x-y)=S_Ax\cdot C_Ay+C_Ax\cdot S_Ay-(S_Bx\cdot C_By+C_Bx\cdot S_By)$$

$$C_A(x+y)=C_Ax\cdot C_Ay-S_Ax\cdot S_Ay+C_Bx\cdot C_By-S_Bx\cdot S_By$$
$$C_A(x-y)=C_Ax\cdot C_Ay-S_Ax\cdot S_Ay-(C_Bx\cdot C_By-S_Bx\cdot S_By)$$

$$S_B(x+y)=S_Bx\cdot C_Ay+C_Bx\cdot S_Ay+S_Ax\cdot C_By+C_Ax\cdot S_By$$
$$S_B(x-y)=S_Bx\cdot C_Ay+C_Bx\cdot S_Ay-(S_Ax\cdot C_By+C_Ax\cdot S_By)$$

$$C_B(x+y)=C_Bx\cdot C_Ay-S_Bx\cdot S_Ay+C_Ax\cdot C_By-S_Ax\cdot S_By$$
$$C_B(x-y)=C_Bx\cdot C_Ay-S_Bx\cdot S_Ay-(C_Ax\cdot C_By-S_Ax\cdot S_By)$$

＜ｘが０のときの値＞

$S_A0=0,\quad C_A0=1,\quad S_B0=0,\quad C_B0=0$

＜ｘをｉｘで置き換えた場合（ｉ：虚数単位）＞

$S_Aix=-S_Ax,\quad C_Aix=C_Ax,\quad S_Bix=iC_Bx,\quad C_Bix=iS_Bx$

＜微分＞

$(S_Ax)'=C_Bx+S_Bx,\quad (C_Ax)'=C_Bx-S_Bx,\quad (S_Bx)'=C_Ax+S_Ax,\quad (C_Bx)'=C_Ax-S_Ax$

$(S_Ax)''=2C_Ax,\quad (C_Ax)''=-2S_Ax,\quad (S_Bx)''=2C_Bx,\quad (C_Bx)''=-2S_Bx$

＜負の偏角の関係＞

$S_A(-x)=S_Ax,\quad C_A(-x)=C_Ax,\quad S_B(-x)=-S_Bx,\quad C_B(-x)=-C_Bx,$

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

　このようになった。三角関数や双曲線関数ほどの簡明さはないが、しかし三角関数と双曲線関数をミックスしたようなきれいな規則から成っている。・・・

最後に、テーマの整理と備忘録の意味から、構想や予想、妄想、つぶやきを述べておく。

****

● 微分した結果が気になる。さらに微分したらどうなるのか？ ４回微分したら次となった。

$$(S_Ax)''''=-4S_Ax,\quad (C_Ax)''''=-4C_Ax,\quad (S_Bx)''''=-4S_Bx,\quad (C_Bx)''''=-4C_Bx$$

全部同じ形となった！

“-4”を別にすれば関数 S_Ax, C_Ax, S_Bx, C_Bx は４回微分すれば元に戻るとわかった。この結果から、四関数は次の微分方程式の解となっている。

$$y''''+4y=0$$

この微分方程式によって四関数が規定されているともいえるかもしれない。ちなみに sinx，cosx は、$y''+y=0$ の解であり、shx，chx は $y''-y=0$ の解である。

役に立つかどうかは別にして、関数 S_Ax，C_Ax，S_Bx，C_Bx がよい性質をもっていることは確実と感じる。

●今回の関数は、なんらかの積分の逆関数という形で定義できるだろうか。

sinx は、$y=\int_{(0\sim x)} 1/\sqrt{(1-x^2)}\,dx$ の逆関数として定義される。つまり $y=\int_{(0\sim x)} 1/\sqrt{(1-x^2)}\,dx=\sin^{-1}x$ となっている。

また楕円関数の一種のレムニスケート関数は $y=\int_{(0\sim x)} 1/\sqrt{(1-x^4)}\,dx$ の逆関数として定義される。ガウスは、それを sin. lemn.（レムニスケート的サイン）や sl と手記に記している。すなわち、$y=\int_{(0\sim x)} 1/\sqrt{(1-x^4)}\,dx=\mathrm{sl}^{-1}x$ である。

今回の関数が、それらと類似のことになっているか？という問いである。

****

＝＝

ここが気になって今回見直していた。そして赤字の微分方程式の箇所は大事に思え、気になった。これら四関数は、基本解になっているはずだが・・？

そこで Wolfram Alpha の「微分方程式」を使って $y''''+4y=0$ を解いてみた。

Wolfram|Alpha Examples: 微分方程式 (wolframalpha.com)

すると、次の素晴らしくきれいな一般解を出してきた。（c の符号は不自然だがそのまま書いた）

$$y=c_2e^{-x}\sin x + c_3e^{x}\sin x + c_1e^{-x}\cos x + c_4e^{x}\cos x \qquad \text{------①}$$

これは本質的には１年半前に定義した四関数（S_Ax，C_Ax，S_Bx，C_Bx）と同じものに見え、よって四関数も基本解となっていることはほぼ確実と思った。そこで四関数でもってロンスキー行列式を計算すると-8 となり 0 でないので、やはり基本解になっている。

これで、四関数の重要性はこの方面からも確定したと言ってよいと思う。

最後に、気になる点や想うことなど述べておく。

****

● Wolfram Alpha の出した微分方程式 $y''''+4y=0$ の一般解①は、なにやらシンメトリーを感じさせ、簡単明瞭な形であり、大事なものとすぐわかる。

そしてその一般解は、定義した四関数(S_Ax，C_Ax，S_Bx，C_Bx)を使っても表現できると今回わかり、それは次となる。

$y = c_1 S_A x + c_2 C_A x + c_3 S_B x + c_4 C_B x$ -----②

ここで、その四関数は（上方での定義の通り）次のものである。

$S_A x = \sin x \cdot \mathrm{sh} x$

$C_A x = \cos x \cdot \mathrm{ch} x$

$S_B x = \sin x \cdot \mathrm{ch} x$

$C_B x = \cos x \cdot \mathrm{sh} x$

もちろん、上記②も同じくシンメトリーを感じさせてくれるもので、きれいである。

数学は、簡単明瞭なものが大事であり、複雑なものは価値が低いとしたものである。

●引用した青字の最後の問いについては、考えてこなかったこともあるが、まだまったくわからない。

数学史の上では、逆関数やレムニスケートあたりは、ガウス、アーベル（やヤコビ）らが関係している。それは楕円関数、楕円積分をめぐる壮大なる物語であり、アーベルが残した結果が認められるのは、彼の死後であったことを思うと、胸が痛む。

● アーベルの人生は、高瀬正仁氏の数学史を読み知った。何度読んでも氏の数学史は感動する。

日々のつれづれ |新しい数学史を求めて (fc2.com)

●冒頭で「その洞窟は地下に縦横に走っていていくつも枝分かれしていて、・・」と述べたが、これは、数学をやっているといつも感じる。

若いころ、数学は普遍的に発展していくものと信じていたが、いろいろやってきてそれは違うと分かった。無数に枝分かれした洞窟が走っていてどれを進むかは、そのときどきの人の判断や関心にゆだねられている。

未踏の洞窟は多くあって、大部分は手つかずのまま残っていると感じる。

****

2024.5.19 杉岡幹生

参考文献

・「近世数学史談」（高木貞治著、共立出版）