＜ 母等式Ⅰ(分母４乗-A 型、B 型) ＞

　ゼータの香りの漂う公式に関し、母等式Ⅰ(分母４乗)の A 型と B 型を見出したので報告したい。A 型の方は（その２４５）と本質的に同じものであり、B 型の方は新種のフーリエ級数となる。

（その２４５）では虚数マジックを使って母等式Ⅰ(分母４乗)（A 型に相当）を出したわけだが、非常に複雑な計算となった。
　同じ虚数マジックでも母等式Ⅱの（その２５５）などの方法はかなり簡単である。しかも同時に二式(A 型、B 型)も得られるという優れものである。よって今回、母等式Ⅰもそちらで計算し直した。「最初のルートは険しい道だった。あとから簡明な道に気づいた！」という所である。

　まず、結果から示す。
得られた式は以下のものである。なお、ch, sh は、双曲線関数 cosh, sinh を略記したものである。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

ゼータ香り式分割母等式Ⅰ（分母４乗-A 型）

$$1\cos x/(1^4+4a^4)\ -3\cos 3x/(3^4+4a^4)\ +5\cos 5x/(5^4+4a^4)\ -7\cos 7x/(7^4+4a^4)\ +\cdot\cdot$$
$$=(\pi/(8a^2))\{\sin(a(\pi/2+x))\,\mathrm{sh}(a(\pi/2-x))\ +\mathrm{sh}(a(\pi/2+x))\sin(a(\pi/2-x))\}/\{\mathrm{ch}(a\pi)+\cos(a\pi)\}\ \text{---①}$$
$$(-\pi/2\leqq x\leqq \pi/2)$$

ここで、a は任意の実数（0 の場合 a->0）。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

ゼータ香り式分割母等式Ⅰ（分母４乗-B 型）

$$1^3\cos x/(1^4+4a^4)\ -3^3\cos 3x/(3^4+4a^4)\ +5^3\cos 5x/(5^4+4a^4)\ -7^3\cos 7x/(7^4+4a^4)\ +\cdot\cdot$$
$$=(\pi/4)\{\cos(a(\pi/2-x))\,\mathrm{ch}(a(\pi/2+x))\ +\mathrm{ch}(a(\pi/2-x))\cos(a(\pi/2+x))\}/\{\mathrm{ch}(a\pi)+\cos(a\pi)\}\ \text{---②}$$
$$(-\pi/2< x< \pi/2)$$

ここで、a は任意の実数（0 の場合 a->0）。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

　この二つを見出した。
　繰り返しになるが、A 型は（その２４５）と本質的に同じものであり、B 型は新種のフーリエ級数となる。
左辺の違いでは、A 型は各項の分子が１乗であり、B 型は３乗となっている点が違っている。

　なお、A 型の右辺は（その２４５）の四重積から二重積の形に書き換えた。それには対称式Ⅰ(1)を用いた。
下記＜導出の方法＞を参照。

①と②の導出方法を示しておく。

＜導出の方法＞

ゼータ香り式分割母等式Ｉ

$$\sin x/(1^2+a^2)\ +3\sin 3x/(3^2+a^2)\ +5\sin 5x/(5^2+a^2)\ +\cdot\cdot=(\pi/4)\mathrm{ch}(a(\pi/2-x))/\mathrm{ch}(a\pi/2) \quad ---③$$

$$(0<x<\pi)$$

このフーリエ級数③でπ/2-x＝ｔと変数変換してから、できた式のｔをｘに戻すと次のようになる。

ゼータ香り式分割母等式Ｉ

$$\cos x/(1^2+a^2)\ -3\cos 3x/(3^2+a^2)\ +5\cos 5x/(5^2+a^2)\ -7\cos 7x/(7^2+a^2)+\cdot\cdot=(\pi/4)\mathrm{ch}(ax)/\mathrm{ch}(a\pi/2) \quad ---④$$

$$(-\pi/2<x<\pi/2)$$

④のａをa√(2i)で置き換えよう（i：虚数単位)。ここで、√(2i)＝(1+i)である。
双曲線関数の加法定理や式変形を行って（略)、次式に到達する。

$$\{1^3\cos x/(1^4+4a^4)\ -3^3\cos 3x/(3^4+4a^4)\ +5^3\cos 5x/(5^4+4a^4)\ -7^3\cos 7x/(7^4+4a^4)\ +\cdot\cdot\}$$
$$-i2a^2\{1\cos x/(1^4+4a^4)\ -3\cos 3x/(3^4+4a^4)\ +5\cos 5x/(5^4+4a^4)\ -7\cos 7x/(7^4+4a^4)\ +\cdot\cdot\}$$
$$=\{(\pi/2)/(\mathrm{ch}(a\pi)+\cos(a\pi))\}$$
$$\times[C1\cos(xa)\mathrm{ch}(xa)\ +S1\sin(xa)\mathrm{sh}(xa)\ +i\{C1\sin(xa)\mathrm{sh}(xa)\ -S1\cos(xa)\mathrm{ch}(xa)\}]$$

ここで、C1＝cos(aπ/2)ch(aπ/2)、S1＝sin(aπ/2)sh(aπ/2), ａは任意の実数（０の場合 a->0)。

両辺を見比べて、虚数項、実数項に対応する式を取り上げ、それぞれに下記の対称式Ｉ(1)とⅡ(2)を適用すると、①、②が得られる。

対称式Ｉ(1)

$$\sin x\cdot\mathrm{sh}x\cdot\cos y\cdot\mathrm{ch}y\ -\ \cos x\cdot\mathrm{ch}x\cdot\sin y\cdot\mathrm{sh}y=\{\sin(x+y)\cdot\mathrm{sh}(x-y)\ +\ \mathrm{sh}(x+y)\cdot\sin(x-y)\}/2$$

対称式Ⅱ(2)

$$\cos x\cdot\mathrm{ch}x\cdot\cos y\cdot\mathrm{ch}y\ +\ \sin x\cdot\mathrm{sh}x\cdot\sin y\cdot\mathrm{sh}y=\{\cos(x-y)\cdot\mathrm{ch}(x+y)\ +\ \mathrm{ch}(x-y)\cdot\cos(x+y)\}/2$$

導出終わり。
****

このようにして得られた。Excel での数値計算でも①、②が正しいことを確認した。

最後で対称式が式の簡明化に貢献していることに注目したい。ゼータの香りの漂う公式（ゼータ香り式）の周辺では、発見した１６個の恒等式（対称式）を使う場面が頻繁にある。

母等式(分母４乗)の状況を整理しよう。現段階で以下の６式が得られている。

●母等式Ⅰ(分母４乗)A 型、B 型

●母等式Ⅱ(分母４乗)A 型、B 型

●母等式Ⅲ(分母４乗)A 型、B 型

さらにあと母等式Ⅳ(分母４乗)A 型、B 型があるはずだが、これはまだ出していない。前回（その２５７）で示唆した通り、公式集にもある次のフーリエ級数から出るはずである。

$$\cos x/(1^2+a^2)\ +\cos 2x/(2^2+a^2)\ +\cos 3x/(3^2+a^2)\ +\cos 4x/(4^2+a^2)\ +\cdots$$
$$=-1/(2a^2)+(\pi/(2a))\,\mathrm{ch}(a(\pi-x))/\mathrm{sh}(a\pi)$$
$$(0\leqq x\leqq 2\pi)$$

最後に、テーマの整理と備忘録の意味から、構想や予想、妄想、つぶやきを述べておく。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

● 「最初のルートは険しい道だった。あとから簡明な道に気づいた！」について。

ある道具(手法)を開発したとき、道具の改良をよく行う。最初に道具を作ったとき、それがベストと思うのだが、しばらくやっていると改良できることに気づくことが非常に多い。数学は、道具の改良の連続という感じがする。登山道は無数にあるといえる。

● ゼータは三角関数の世界、ゼータの香り式は三角関数と双曲線関数の融合の世界。

この二世界に関して、対称性は

前者＜後者

となっているはずである。

● 対称性のある世界は美しい結果を生む。

ゼータもゼータ香り式も無限に分割できる。それは二次方程式に還元される世界である。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

2022. 9. 4 杉岡幹生

＜参考文献＞

・「数学公式Ⅱ」（森口・宇田川・一松、岩波書店）