＜ 母等式Ⅲ(分母４乗-A 型、B 型) ＞

新しい（と考えられる）フーリエ級数を見出したので報告したい。以下の二つである。これまでのⅠ型、Ⅱ型とは異なるものなので Ⅲ型とする。

なお、ch, sh は、双曲線関数 cosh, sinh を略記したものである。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

ゼータ香り式分割母等式Ⅲ（分母４乗-A 型）

$1\sin x/(1^4+4a^4)\ -2\sin 2x/(2^4+4a^4)\ +3\sin 3x/(3^4+4a^4)\ -4\sin 4x/(4^4+4a^4)\ +\cdot\cdot$
$=(\pi/4a^2)\{\sin(a(\pi-x))\mathrm{sh}(a(\pi+x))\ -\mathrm{sh}(a(\pi-x))\sin(a(\pi+x))\}/\{\mathrm{ch}(2a\pi)-\cos(2a\pi)\}$ ---①

$(-\pi\leqq x\leqq\pi)$

ここで、a は任意の実数（0 の場合 a->0)。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

ゼータ香り式分割母等式Ⅲ（分母４乗-B 型）

$1^3\sin x/(1^4+4a^4)\ -2^3\sin 2x/(2^4+4a^4)\ +3^3\sin 3x/(3^4+4a^4)\ -4^3\sin 4x/(4^4+4a^4)\ +\cdot\cdot$
$=(\pi/2)\{\cos(a(\pi-x))\mathrm{ch}(a(\pi+x))\ -\mathrm{ch}(a(\pi-x))\cos(a(\pi+x))\}/\{\mathrm{ch}(2a\pi)-\cos(2a\pi)\}$ ---②

$(-\pi<x<\pi)$

ここで、a は任意の実数（0 の場合 a->0)。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

この二つを見出した。

これまでのⅠ型, Ⅱ型（分母４乗型）とこのⅢ型との違いを述べると、前者は左辺項の並びが 1,3,5・・となっていたが、後者は 1,2,3,4,・・となっている点が違っている。

右辺の分子を見ると、①はサイン的なもの、②はコサイン的なものとなっている。美しい。

導出方法の概要を示しておく。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

＜導出の方法＞

公式集にあるフーリエ級数

$\sin x/1\ +\sin 2x/2\ +\sin 3x/3\ +\sin 4x/4\ +\cdot\cdot=(\pi-x)/2$　　$(0<x<2\pi)$ ---③

に作用素 $\int e^{ax}$ を作用させて、0～x の範囲で積分を実行してある式を得た。

じつはその式は１２年前に導出していた次のものであり、これは半年前に別の式で命名した強公式と同類のものであった。そのままコピー。

高見沢彗星　その６

＜強公式＞

$((\pi-x)/(2a))\cdot e^{(ax)}-\pi/(2a)+(e^{(ax)}-1)/(2a^2)$

$=\sum_{(n=1\sim\infty)}\{1/(n^2+a^2)-\cos(nx)\cdot e^{(ax)}/(n^2+a^2)+a\cdot\sin(nx)\cdot e^{(ax)}/(n(n^2+a^2))\}$

この強公式に③を代入すると簡単化できて、次の弱公式を得た。この辺は１２年前は行っていない。

＜弱公式＞

$-\pi/(2a)+(e^{ax}-1)/(2a^2)=\sum_{(n=1\sim\infty)}(1-\cos(nx)\cdot e^{ax})/(n^2+a^2)-(e^{ax}/a)\ \sum_{(n=1\sim\infty)}n\cdot\sin(nx)/(n^2+a^2)$

この弱公式に虚数マジックを適用する。

虚数マジックとは、a＝ik として式変形を行って二式に分け（i は虚数単位）、その二式に対して（今度は）k＝ia とするというふしぎなものである。次の二つのフーリエ級数④と⑤（公式集にある既知のもの）を得た。

$\cos x/(1^2+a^2)+\cos 2x/(2^2+a^2)+\cos 3x/(3^2+a^2)+\cos 4x/(4^2+a^2)+\cdots$

$=-1/(2a^2)+(\pi/(2a))\mathrm{ch}(a(\pi-x))/\mathrm{sh}(a\pi)$ ---④

$(0\leqq x\leqq 2\pi)$

$1\sin x/(1^2+a^2)+2\sin 2x/(2^2+a^2)+3\sin 3x/(3^2+a^2)+4\sin 4x/(4^2+a^2)+\cdots$

$=(\pi/2)\mathrm{sh}(a(\pi-x))/\mathrm{sh}(a\pi)$ ---⑤

$(0<x<2\pi)$

⑤を変数変換して、次を得る。

$1\sin x/(1^2+a^2)-2\sin 2x/(2^2+a^2)+3\sin 3x/(3^2+a^2)-4\sin 4x/(4^2+a^2)+\cdots$

$=(\pi/2)\mathrm{sh}(ax))/\mathrm{sh}(a\pi)$ ---⑥

$(-\pi<x<\pi)$

この⑥に、さらに虚数マジックを適用して二式を得た。

その二式に対し、先日発見した下記の対称式Ⅱ(1)とⅠ(2)を適用して冒頭のフーリエ級数①、②に到達した。

対称式Ⅱ(1)

$\cos x\cdot\mathrm{sh}x\cdot\cos y\cdot\mathrm{sh}y+\sin x\cdot\mathrm{ch}x\cdot\sin y\cdot\mathrm{ch}y=\{\cos(x-y)\cdot\mathrm{ch}(x+y)-\mathrm{ch}(x-y)\cdot\cos(x+y)\}/2$

対称式Ⅰ(2)

$\cos x\cdot\mathrm{sh}x\cdot\sin y\cdot\mathrm{ch}y-\sin x\cdot\mathrm{ch}x\cdot\cos y\cdot\mathrm{sh}y=\{\sin(x+y)\cdot\mathrm{sh}(x-y)-\mathrm{sh}(x+y)\cdot\sin(x-y)\}/2$

導出終わり。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

このようにして導出した。①,②に対し、Excel で数値計算を行ったが正しいものであった。

①, ②のフーリエ級数は、文献の公式集には載っていないので、たぶん新しいものと思う。

フーリエ級数が得られたので、ゼータ香り式の分割を行うことができる。分身がこれらの母等式から生み出されていく。

最後に、テーマの整理と備忘録の意味から、構想や予想、妄想、つぶやきを述べておく。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

● 改めて思うのは、虚数マジックの威力である。虚数マジックは、新しい式を生み出す魔力がある。

● ＜導出の方法＞での④に対しては、まだ虚数マジックを適用していない。それをやるとまた新種のフーリエ級数が出るはずである。

● 興味があったのは「今回の導出では先日発見した１６個の恒等式（対称式）のどれが関係しているのか？」ということである。＜導出の方法＞の通り、対称式Ⅱ⑴とⅠ⑵が関係していると分かった。

● １２前は、強公式の段階で止まっていた。それでも秩序を発見して連立方程式に持ち込んで、分母２乗型のゼータ香り式の計算を行っているが、複雑な計算になっている。分母２乗型の場合は、＜導出の方法＞での通り、既存のフーリエ級数に分離できる。

やはり複雑なものはダメである。簡単化こそが重要である。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

2022.8.28 杉岡幹生

＜参考文献＞

・「数学公式Ⅱ」（森口・宇田川・一松、岩波書店）