＜ Ⅱ分母４乗Ｂ型香り式の１分割、２分割 ＞

今回は、次のゼータ香り式の値（１分割）と２分割が得られたので報告したい。

$$1^2/(1^4+4a^4)\ +3^2/(3^4+4a^4)\ +5^2/(5^4+4a^4)\ +7^2/(7^4+4a^4)\ +\cdots$$

これは、（その２５５）で見出したゼータ香り式分割母等式Ⅱ(分母４乗-B 型)から得られるものであるので、上式の名前を“Ⅱ分母４乗Ｂ型香り式”と名付けることにする。

さて、結論から示す。
上式のⅡ分母４乗Ｂ型香り式そのもの（１分割）の値を示すと次となる（①は下方で使ったので②とした）。
なお、ch, sh はそれぞれ双曲線関数 cosh, sinh を略記したものである。

＜ Ⅱ分母４乗Ｂ型香り式　１分割 ＞

$$1^2/(1^4+4a^4)\ +3^2/(3^4+4a^4)\ +5^2/(5^4+4a^4)\ +7^2/(7^4+4a^4)\ +\cdots$$
$$=(\pi/(8a))\{\mathrm{sh}(a\pi)+\sin(a\pi)\}/\{\cos(a\pi)+\mathrm{ch}(a\pi)\}\quad ---②$$

そして、この②の２分割も導出した。以下の③、④である。それらを辺々足し算すると②になることを確認いただきたい。（だから２分割！）

＜ Ⅱ分母４乗Ｂ型香り式　２分割（２分身）＞

$$1^2/(1^4+4a^4)\ +7^2/(7^4+4a^4)\ +9^2/(9^4+4a^4)\ +15^2/(15^4+4a^4)\ +17^2/(17^4+4a^4)\ +23^2/(23^4+4a^4)\ +\cdots$$
$$=(\pi/(16a))\{\mathrm{sh}(a\pi)+\sin(a\pi)+\sqrt{2}(\cos\alpha\,\mathrm{sh}\beta-\mathrm{sh}\alpha\cos\beta-\sin\alpha\,\mathrm{ch}\beta+\mathrm{ch}\alpha\sin\beta)\}/\{\cos(a\pi)+\mathrm{ch}(a\pi)\}\quad ---③$$

$$3^2/(3^4+4a^4)\ +5^2/(5^4+4a^4)\ +11^2/(11^4+4a^4)\ +13^2/(13^4+4a^4)\ +19^2/(17^4+4a^4)\ +21^2/(23^4+4a^4)\ +\cdots\cdots$$
$$=(\pi/(16a))\{\mathrm{sh}(a\pi)+\sin(a\pi)-\sqrt{2}(\cos\alpha\,\mathrm{sh}\beta-\mathrm{sh}\alpha\cos\beta-\sin\alpha\,\mathrm{ch}\beta+\mathrm{ch}\alpha\sin\beta)\}/\{\cos(a\pi)+\mathrm{ch}(a\pi)\}\quad ---④$$

ここで、$\alpha=a\pi/4$、$\beta=3a\pi/4$, a は任意の実数（0 の場合 a->0）。

以下で②、③、④の導出の方法を示す。

＜②、③、④の導出の方法＞

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

ゼータ香り式分割母等式Ⅱ（分母４乗-B 型）

$$1^2\sin x/(1^4+4a^4)\ -3^2\sin 3x/(3^4+4a^4)\ +5^2\sin 5x/(5^4+4a^4)\ -7^2\sin 7x/(7^4+4a^4)\ +\cdots$$
$$=(\pi/4a)\{(C1-S1)\cos(ax)\,\mathrm{sh}(ax)\ +(C1+S1)\sin(ax)\,\mathrm{ch}(ax)\}/\{\cos(a\pi)+\mathrm{ch}(a\pi)\}\quad ---①$$
$$(-\pi/2\leqq x\leqq \pi/2)$$

ここで、$C1=\cos(a\pi/2)\mathrm{ch}(a\pi/2)$、$S1=\sin(a\pi/2)\mathrm{sh}(a\pi/2)$, a は任意の実数（0 の場合 a->0）。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

前回見出した上記①を利用する。

①の x に<u>π/2 を代入</u>し、そして最下方の対称式Ⅲ(1)とⅣ(1)を用い、整理して次を得る。

$$1^2/(1^4+4a^4)\ +3^2/(3^4+4a^4)\ +5^2/(5^4+4a^4)\ +7^2/(7^4+4a^4)\ +\cdot\cdot$$
$$=(\pi/(8a))\{\mathrm{sh}(a\pi)+\sin(a\pi)\}/\{\cos(a\pi)+\mathrm{ch}(a\pi)\}\quad ---②$$

このようにして②の１分割（②そのもの）がまず得られた。

①の x に<u>π/4 を代入</u>し、そして最下方の対称式Ⅲ(1)とⅣ(1)を用い、整理して次を得る。

$$1^2/(1^4+4a^4)-3^2/(3^4+4a^4)-5^2/(5^4+4a^4)+7^2/(7^4+4a^4)+9^2/(9^4+4a^4)-11^2/(11^4+4a^4)-13^2/(13^4+4a^4)+15^2/(15^4+4a^4)\ +\cdot\cdot$$
$$=(\pi\sqrt{2}/(8a))(\cos\alpha\,\mathrm{sh}\beta-\mathrm{sh}\alpha\cos\beta-\sin\alpha\,\mathrm{ch}\beta+\mathrm{ch}\alpha\sin\beta)/\{\cos(a\pi)+\mathrm{ch}(a\pi)\}\ -----⑤$$

ここで、$\alpha=a\pi/4$、$\beta=3a\pi/4$ である。

さて、A,B を次のように定義しよう。

$$A=1^2/(1^4+4a^4)\ +7^2/(7^4+4a^4)\ +9^2/(9^4+4a^4)\ +15^2/(15^4+4a^4)\ +17^2/(17^4+4a^4)\ +23^2/(23^4+4a^4)\ +\cdot\cdot$$
$$B=3^2/(3^4+4a^4)\ +5^2/(5^4+4a^4)\ +11^2/(11^4+4a^4)\ +13^2/(13^4+4a^4)\ +19^2/(19^4+4a^4)\ +21^2/(21^4+4a^4)\ +\cdot\cdot$$

この A,B を用いると、②、⑤は次のようになる。

$$A+B==(\pi/(8a))\{\mathrm{sh}(a\pi)+\sin(a\pi)\}/\{\cos(a\pi)+\mathrm{ch}(a\pi)\}\quad ------⑥$$
$$A-B=(\pi\sqrt{2}/(8a))(\cos\alpha\,\mathrm{sh}\beta-\mathrm{sh}\alpha\cos\beta-\sin\alpha\,\mathrm{ch}\beta+\mathrm{ch}\alpha\sin\beta)/\{\cos(a\pi)+\mathrm{ch}(a\pi)\}\ -----⑦$$

⑥、⑦を A,B の連立方程式と見て解いて、上方の③、④が得られる。
このようにして、②、③、④が得られた。

対称式Ⅲ(1)

$$\cos x\cdot\mathrm{ch}x\cdot\cos y\cdot\mathrm{sh}y + \sin x\cdot\mathrm{sh}x\cdot\sin y\cdot\mathrm{ch}y=\{\cos(x-y)\cdot\mathrm{sh}(x+y) - \mathrm{sh}(x-y)\cdot\cos(x+y)\}/2$$

対称式Ⅳ(1)

$$\sin x\cdot\mathrm{sh}x\cdot\cos y\cdot\mathrm{sh}y - \cos x\cdot\mathrm{ch}x\cdot\sin y\cdot\mathrm{ch}y=\{\sin(x-y)\cdot\mathrm{ch}(x+y) - \mathrm{ch}(x-y)\cdot\sin(x+y)\}/2$$

導出終わり。

****

このようにして、Ⅱ分母４乗Ｂ型香り式の１分割（②）と２分割（③、④）が得られた。
対称式Ⅲ(1)とⅣ(1)は、式の簡単化に<u>決定的な役割</u>を果たしている。

結果を再び眺めよう。再掲。

＜ Ⅱ分母４乗Ｂ型香り式　１分割 ＞

$$1^2/(1^4+4a^4) +3^2/(3^4+4a^4) +5^2/(5^4+4a^4) +7^2/(7^4+4a^4) + \cdot\cdot$$
$$=(\pi/(8a))\{sh(a\pi)+\sin(a\pi)\}/\{\cos(a\pi)+ch(a\pi)\} \quad ---②$$

＜ Ⅱ分母４乗Ｂ型香り式　２分割（２分身）＞

$$1^2/(1^4+4a^4) +7^2/(7^4+4a^4) +9^2/(9^4+4a^4) +15^2/(15^4+4a^4) +17^2/(17^4+4a^4) +23^2/(23^4+4a^4) + \cdot\cdot$$
$$=(\pi/(16a))\{sh(a\pi)+\sin(a\pi)+\sqrt{2}(\cos\alpha\, sh\beta-sh\alpha\cos\beta-\sin\alpha\, ch\beta+ch\alpha\sin\beta)\}/\{\cos(a\pi)+ch(a\pi)\} \quad ---③$$

$$3^2/(3^4+4a^4) +5^2/(5^4+4a^4) +11^2/(11^4+4a^4) +13^2/(13^4+4a^4) +19^2/(17^4+4a^4) +21^2/(23^4+4a^4) + \cdot\cdot\cdot\cdot$$
$$=(\pi/(16a))\{sh(a\pi)+\sin(a\pi)-\sqrt{2}(\cos\alpha\, sh\beta-sh\alpha\cos\beta-\sin\alpha\, ch\beta+ch\alpha\sin\beta)\}/\{\cos(a\pi)+ch(a\pi)\} \quad ---④$$

ここで、$\alpha=a\pi/4$、$\beta=3a\pi/4$, a は任意の実数（0 の場合 a->0）。

なんともよい眺めである。
③と④を足したら②になることは即座にわかる。これらの式はExcel の数値計算でも正しい。

最後に、テーマの整理と備忘録の意味から、構想や予想、妄想、つぶやきを述べておく。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

●１分割については４年前の（その３）で出していた。変数変換して②に一致することはすぐわかる。今回は、母等式からの美しい導出過程を見るために再度導いた。

● 導出の方法で出した⑤を再掲。

$$1^2/(1^4+4a^4)-3^2/(3^4+4a^4)-5^2/(5^4+4a^4)+7^2/(7^4+4a^4)+9^2/(9^4+4a^4)-11^2/(11^4+4a^4)-13^2/(13^4+4a^4)+15^2/(15^4+4a^4) + \cdot\cdot$$
$$=(\pi\sqrt{2}/(8a))(\cos\alpha\, sh\beta-sh\alpha\cos\beta-\sin\alpha\, ch\beta+ch\alpha\sin\beta)/\{\cos(a\pi)+ch(a\pi)\} \quad -----⑤$$

これは、実２次体Q(2)ゼータ

$$1 -1/3^s -1/5^s +1/7^s+ 1/9^s -1/11^s -1/13^s +1/15^s+ \cdot\cdot$$

の類似物となっている。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

2022.8.16 杉岡幹生