＜ 対称式Ⅰ(1)は八つの変換で不変 ＞

前回、新しく見出した１６個の恒等式を報告し、その最後で私は次のようにつぶやいた。

群でいえば、どんな種類の群に対応するのか。
　例えば、上式では、x と y を交換しても、式は不変。
また、x と y をそれぞれ ix, iy に変えても（i：虚数単位)、式は不変！！
それ以外の変換でも不変となる。
　位数は？　たぶん１６個の式すべて、同じ種類の群になると思う。

このように問うたわけであるが、対称式Ⅰ(1)を調べた結果、八つの変換（対称変換）で不変となることがわかった。

幾何学ではよく鏡面をとったり回転させたりして、図形の不変性・対称性を見るが、それと同じようなことを式に対して行ったわけである。

それを見る前にまず１６個の恒等式を全部並べておこう。sh, ch はそれぞれ双曲線関数 sinh, cosh を略したものである。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

[四重積-二重積]対称式Ⅰ

対称式Ⅰ(1)

$$\sin x\cdot \mathrm{sh}x\cdot \cos y\cdot \mathrm{ch}y - \cos x\cdot \mathrm{ch}x\cdot \sin y\cdot \mathrm{sh}y=\{\sin(x+y)\cdot \mathrm{sh}(x-y) + \mathrm{sh}(x+y)\cdot \sin(x-y)\}/2$$

対称式Ⅰ(2)

$$\cos x\cdot \mathrm{sh}x\cdot \sin y\cdot \mathrm{ch}y - \sin x\cdot \mathrm{ch}x\cdot \cos y\cdot \mathrm{sh}y=\{\sin(x+y)\cdot \mathrm{sh}(x-y) - \mathrm{sh}(x+y)\cdot \sin(x-y)\}/2$$

対称式Ⅰ(3)

$$\sin x\cdot \mathrm{ch}x\cdot \cos y\cdot \mathrm{sh}y + \cos x\cdot \mathrm{sh}x\cdot \sin y\cdot \mathrm{ch}y=\{\sin(x+y)\cdot \mathrm{sh}(x+y) - \mathrm{sh}(x-y)\cdot \sin(x-y)\}/2$$

対称式Ⅰ(4)

$$\sin x\cdot \mathrm{sh}x\cdot \cos y\cdot \mathrm{ch}y + \cos x\cdot \mathrm{ch}x\cdot \sin y\cdot \mathrm{sh}y=\{\sin(x+y)\cdot \mathrm{sh}(x+y) + \mathrm{sh}(x-y)\cdot \sin(x-y)\}/2$$

[四重積-二重積]対称式Ⅱ

対称式Ⅱ(1)

$$\cos x\cdot \mathrm{sh}x\cdot \cos y\cdot \mathrm{sh}y + \sin x\cdot \mathrm{ch}x\cdot \sin y\cdot \mathrm{ch}y=\{\cos(x-y)\cdot \mathrm{ch}(x+y) - \mathrm{ch}(x-y)\cdot \cos(x+y)\}/2$$

対称式Ⅱ(2)

$$\cos x\cdot \mathrm{ch}x\cdot \cos y\cdot \mathrm{ch}y + \sin x\cdot \mathrm{sh}x\cdot \sin y\cdot \mathrm{sh}y=\{\cos(x-y)\cdot \mathrm{ch}(x+y) + \mathrm{ch}(x-y)\cdot \cos(x+y)\}/2$$

対称式Ⅱ(3)

$$\cos x\cdot\mathrm{ch}\,x\cdot\cos y\cdot\mathrm{ch}\,y-\sin x\cdot\mathrm{sh}\,x\cdot\sin y\cdot\mathrm{sh}\,y=\{\cos(x+y)\cdot\mathrm{ch}(x+y)+\mathrm{ch}(x-y)\cdot\cos(x-y)\}/2$$

対称式Ⅱ(4)

$$\cos x\cdot\mathrm{sh}\,x\cdot\cos y\cdot\mathrm{sh}\,y-\sin x\cdot\mathrm{ch}\,x\cdot\sin y\cdot\mathrm{ch}\,y=\{\cos(x+y)\cdot\mathrm{ch}(x+y)-\mathrm{ch}(x-y)\cdot\cos(x-y)\}/2$$

[四重積-二重積]対称式Ⅲ

対称式Ⅲ(1)

$$\cos x\cdot\mathrm{ch}\,x\cdot\cos y\cdot\mathrm{sh}\,y+\sin x\cdot\mathrm{sh}\,x\cdot\sin y\cdot\mathrm{ch}\,y=\{\cos(x-y)\cdot\mathrm{sh}(x+y)-\mathrm{sh}(x-y)\cdot\cos(x+y)\}/2$$

対称式Ⅲ(2)

$$\cos x\cdot\mathrm{sh}\,x\cdot\cos y\cdot\mathrm{ch}\,y+\sin x\cdot\mathrm{ch}\,x\cdot\sin y\cdot\mathrm{sh}\,y=\{\cos(x-y)\cdot\mathrm{sh}(x+y)+\mathrm{sh}(x-y)\cdot\cos(x+y)\}/2$$

対称式Ⅲ(3)

$$\cos x\cdot\mathrm{sh}\,x\cdot\cos y\cdot\mathrm{ch}\,y-\sin x\cdot\mathrm{ch}\,x\cdot\sin y\cdot\mathrm{sh}\,y=\{\cos(x+y)\cdot\mathrm{sh}(x+y)+\mathrm{sh}(x-y)\cdot\cos(x-y)\}/2$$

対称式Ⅲ(4)

$$\cos x\cdot\mathrm{ch}\,x\cdot\cos y\cdot\mathrm{sh}\,y-\sin x\cdot\mathrm{sh}\,x\cdot\sin y\cdot\mathrm{ch}\,y=\{\cos(x+y)\cdot\mathrm{sh}(x+y)-\mathrm{sh}(x-y)\cdot\cos(x-y)\}/2$$

[四重積-二重積]対称式Ⅳ

対称式Ⅳ(1)

$$\sin x\cdot\mathrm{sh}\,x\cdot\cos y\cdot\mathrm{sh}\,y-\cos x\cdot\mathrm{ch}\,x\cdot\sin y\cdot\mathrm{ch}\,y=\{\sin(x-y)\cdot\mathrm{ch}(x+y)-\mathrm{ch}(x-y)\cdot\sin(x+y)\}/2$$

対称式Ⅳ(2)

$$\sin x\cdot\mathrm{ch}\,x\cdot\cos y\cdot\mathrm{ch}\,y-\cos x\cdot\mathrm{sh}\,x\cdot\sin y\cdot\mathrm{sh}\,y=\{\sin(x-y)\cdot\mathrm{ch}(x+y)+\mathrm{ch}(x-y)\cdot\sin(x+y)\}/2$$

対称式Ⅳ(3)

$$\sin x\cdot\mathrm{ch}\,x\cdot\cos y\cdot\mathrm{ch}\,y+\cos x\cdot\mathrm{sh}\,x\cdot\sin y\cdot\mathrm{sh}\,y=\{\sin(x+y)\cdot\mathrm{ch}(x+y)+\mathrm{ch}(x-y)\cdot\sin(x-y)\}/2$$

対称式Ⅳ(4)

$$\sin x\cdot\mathrm{sh}\,x\cdot\cos y\cdot\mathrm{sh}\,y+\cos x\cdot\mathrm{ch}\,x\cdot\sin y\cdot\mathrm{ch}\,y=\{\sin(x+y)\cdot\mathrm{ch}(x+y)-\mathrm{ch}(x-y)\cdot\sin(x-y)\}/2$$

ここで、x,y は任意の実数である。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

何度見ても美しい。対称性に満ち溢れている。

対称式Ⅰ(1)

$$\sin x\cdot\mathrm{sh}\,x\cdot\cos y\cdot\mathrm{ch}\,y-\cos x\cdot\mathrm{ch}\,x\cdot\sin y\cdot\mathrm{sh}\,y=\{\sin(x+y)\cdot\mathrm{sh}(x-y)+\mathrm{sh}(x+y)\cdot\sin(x-y)\}/2$$

さて今回、この対称式Ｉ(1)に着目し、その不変性を調べた。残りの１５式はまだ精密には調べられていない。

どんな変数の変換で、上式は不変となるのだろうか？

調べた結果、以下に示す八つの対称変換で式は形を変えない、つまり不変となることがわかった。

調べる前準備として、次の関係をおぼえておこう。
三角関数と双曲線関数の間には、i(虚数単位)を用いて以下の興味深い関係がある。

$$i\cdot \mathrm{sh}(a)=\sin(ia),\quad i\cdot \sin(a)=\mathrm{sh}(ia),\quad \mathrm{ch}(a)=\cos(ia),\quad \cos(a)=\mathrm{ch}(ia) \qquad \text{----①}$$

この関係を使って調べていく。
x, y のセット(x, y)を考えたとき、以下の八つの変換に対して対称式Ｉ(1)は不変となる。

(x, y)に対するそれぞれの変換操作を言葉で述べれば、次となる。（i：虚数単位）

E：「x を x に置き換える、且つ、y を y に置き換える。」
A1：「x を ix に置き換える、且つ、y を iy に置き換える。」
A2：「x を i^2x に置き換える、且つ、y を i^2y に置き換える。」
A3：「x を i^3x に置き換える、且つ、y を i^3y に置き換える。」
A4：「x を x に置き換える、且つ、y を−y に置き換える。」
A5：「x を−x に置き換える、且つ、y を y に置き換える。」
A6：「x を ix に置き換える、且つ、y を−iy に置き換える。」
A7：「x を−ix に置き換える、且つ、y を iy に置き換える。」

これらを表にまとめたものを示す。

表Ａ

E: $(x, y) \Rightarrow (x, y)$
A1: $(x, y) \Rightarrow (ix, iy)$
A2: $(x, y) \Rightarrow (i^2x, i^2y)$
A3: $(x, y) \Rightarrow (i^3x, i^3y)$
A4: $(x, y) \Rightarrow (x, -y)$
A5: $(x, y) \Rightarrow (-x, y)$
A6: $(x, y) \Rightarrow (ix, -iy)$
A7: $(x, y) \Rightarrow (-ix, iy)$

これら全ての変換で対称式Ｉ(1)は不変となる。なお、i^2 は−1 だが、そのままにしている。

Ｉ(1)は高い対称性を備えていることが分かった。①を使えば確認は容易なので、確認いただきたい。

そして、これら八つの変換の集合が群を成すことはほとんど確実である。まだ積表が完成していないが、間違いなく群を成している。位数８の群である。

最後に、テーマの整理と備忘録の意味から、構想や予想、妄想、つぶやきを述べておく。

****

●冒頭の「たぶん１６個の式すべて、同じ種類の群になると思う。」は間違いであると、分かった。

私は、「１６個の公式全てで同じ対称性を備えている」と思い込んでいたが、違っていた！

実験したところ、ⅢとⅣの式は上の表Ａの変換で不変とならないものがある。

例えば、Ⅲ(4)やⅣ(4)では、A1:(x, y)⇒（ix, iy）で不変とならない。ⅢとⅣの全式でそうである。

すなわち、ⅢやⅣはⅠやⅡより対称性が低いのである。

●最初(x, y)⇒（y, x）もできると考え、位数 16 の群になると思い込んだが、それは勘違いであった。

16×16 の積表を作っていて、無駄な時間を費やした・・

(x, y)⇒（y, x）は、E：(x, y)⇒（x, y）と実質的に同じであり、考える価値はない。

●（その２４５）で見た位数８の群と比べてどうなのか。今回のものは、同じ位数８でもその以前のものと群の種類が違っているだろうか？

積表は作成途上で未完。

●４年前の（その４）での香り式の２分割は複雑になったが、Ⅰ～Ⅳの式を使えばさらに簡単化できそうである。

A=1/(1^8+1) + 1/(3^8+ 1) + 1/(5^8+1) + 1/(7^8+1) + ・・

B=1/(1^8+1) + 3^4/(3^8+1) + 5^4/(5^8+1) + 7^4/(7^8+1)+・・

この正体は、次となります。

A=K[α{(sh2α-s2α)-2sβshβ(casha+sacha)+2cβchβ(casha-sacha)}+β{(sh2β-s2β)-2sasha(cβshβ+sβchβ)+2cacha(cβshβ-sβchβ)}]

B=K[β{(sh2α-s2α)-2sβshβ(casha+sacha)+2cβchβ(casha-sacha)}-α{(sh2β-s2β)-2sasha(cβshβ+sβchβ)+2cacha(cβshβ-sβchβ)}]

ここで、α=(π/√2)cos(π/8)、β=(π/√2)sin(π/8)です。

sa、ca、sha、chaは、それぞれsina、cosa、sinha、coshaを表します。長くなるので略記しました。sinh、coshは双曲線関数です。またKは、K=1/[8*{(cβcha+cachβ)^2+(sβsha-sashβ)^2}]です。

****

2022.7.24 杉岡幹生