＜ 八つの恒等式、[四重積-二重積]対称式 ＞

　前回の二つの恒等式に加え、さらに六つの恒等式を見出した。
結局、計八つの恒等式を得ることができたので、今回はそれらをまとめて紹介したい。その八つとは以下のものである。

　前回の二つはⅠ(1)とⅡ(1)である。sh,ch はそれぞれ双曲線関数 sinh,cosh を略したものである。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

[四重積-二重積]対称式Ⅰ

対称式Ⅰ(1)

$$\sin x\cdot\mathrm{sh}x\cdot\cos y\cdot\mathrm{ch}y-\cos x\cdot\mathrm{ch}x\cdot\sin y\cdot\mathrm{sh}y=\{\sin(x+y)\cdot\mathrm{sh}(x-y)+\mathrm{sh}(x+y)\cdot\sin(x-y)\}/2$$

対称式Ⅰ(2)

$$\cos x\cdot\mathrm{sh}x\cdot\sin y\cdot\mathrm{ch}y-\sin x\cdot\mathrm{ch}x\cdot\cos y\cdot\mathrm{sh}y=\{\sin(x+y)\cdot\mathrm{sh}(x-y)-\mathrm{sh}(x+y)\cdot\sin(x-y)\}/2$$

対称式Ⅰ(3)

$$\sin x\cdot\mathrm{ch}x\cdot\cos y\cdot\mathrm{sh}y+\cos x\cdot\mathrm{sh}x\cdot\sin y\cdot\mathrm{ch}y=\{\sin(x+y)\cdot\mathrm{sh}(x+y)-\mathrm{sh}(x-y)\cdot\sin(x-y)\}/2$$

対称式Ⅰ(4)

$$\sin x\cdot\mathrm{sh}x\cdot\cos y\cdot\mathrm{ch}y+\cos x\cdot\mathrm{ch}x\cdot\sin y\cdot\mathrm{sh}y=\{\sin(x+y)\cdot\mathrm{sh}(x+y)+\mathrm{sh}(x-y)\cdot\sin(x-y)\}/2$$

[四重積-二重積]対称式Ⅱ

対称式Ⅱ(1)

$$\cos x\cdot\mathrm{sh}x\cdot\cos y\cdot\mathrm{sh}y+\sin x\cdot\mathrm{ch}x\cdot\sin y\cdot\mathrm{ch}y=\{\cos(x-y)\cdot\mathrm{ch}(x+y)-\mathrm{ch}(x-y)\cdot\cos(x+y)\}/2$$

対称式Ⅱ(2)

$$\cos x\cdot\mathrm{ch}x\cdot\cos y\cdot\mathrm{ch}y+\sin x\cdot\mathrm{sh}x\cdot\sin y\cdot\mathrm{sh}y=\{\cos(x+y)\cdot\mathrm{ch}(x-y)+\mathrm{ch}(x+y)\cdot\cos(x-y)\}/2$$

対称式Ⅱ(3)

$$\cos x\cdot\mathrm{ch}x\cdot\cos y\cdot\mathrm{ch}y-\sin x\cdot\mathrm{sh}x\cdot\sin y\cdot\mathrm{sh}y=\{\cos(x+y)\cdot\mathrm{ch}(x+y)+\mathrm{ch}(x-y)\cdot\cos(x-y)\}/2$$

対称式Ⅱ(4)

$$\cos x\cdot\mathrm{sh}x\cdot\cos y\cdot\mathrm{sh}y-\sin x\cdot\mathrm{ch}x\cdot\sin y\cdot\mathrm{ch}y=\{\cos(x+y)\cdot\mathrm{ch}(x+y)-\mathrm{ch}(x-y)\cdot\cos(x-y)\}/2$$

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

　この八つであるが、美しいものである。

右辺が sin,sh ばかりのものを対称式Ⅰ、cos,ch ばかりのものを対称式Ⅱとした。そうなっていることを確認していただきたい。

これらは私のもつ公式集「数学公式Ⅱ」（最後の＜参考文献＞）の「双曲線函数と三角函数とを含む公式」のページには載っていないが、本当に知られていないかは分からない。

　式の導出については、前回の（その２４９）で示したものと類似の方法で行えば簡単に出る。

　対称式Ⅰ(1)は、（その２４９）で行った通り、Ｌ(3)類似香り式の分身の分子を簡単化するのに役立ってくれた。他の式も様々な場面で役立つことになると思う。

2022.7.10 杉岡幹生

＜参考文献＞

・「数学公式Ⅱ」（森口・宇田川・一松、岩波書店）