＜ ある恒等式の発見と、L(3)類似香り式分割の結果の書き換え＞

今回、ある恒等式を見出したので、まずそれを紹介したい。
そしてその恒等式を使うことで、これまでに得たL(3)類似香り式の分割の結果をより簡明な形に書き換えることができたので、それも示していく。

発見した恒等式は次のものである。sh,ch はそれぞれ双曲線関数 sinh,cosh を略したものである。

sinx・shx・cosy・chy － cosx・chx・siny・shy
＝{sin(x+y)・sh(x−y) ＋ sh(x+y)・sin(x−y)}/2 ---①

x,y は任意の実数。

対称性が際立ったきれいな式である。私のもつ公式集には載ってはいないが（最後の＜参考文献＞）、本当に知られていないかは分からない。

左辺の四重積、右辺の二重積に着目して、この公式を三角/双曲線関数における[四重積-二重積]対称式Ⅰと名付けたい。Ⅰを付けたのはⅡも見出したからなのだが、それは最後に紹介する。

さて、これを用いることで（その２４６）、（その２４７）で得たL(3)類似香り式の分割の結果（右辺）を簡明な形に書き換えることができる。まずは（その２４６）の２分割の結果を１分割（本体そのもの）とともに復習しよう。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

＜L(3)類似香り式　１分割＞

$1/(1^4+4a^4)\ -3/(3^4+4a^4)\ +5/(5^4+4a^4)\ -7/(7^4+4a^4)\ +9/(9^4+4a^4)\ -11/(11^4+4a^4)\ +13/(13^4+4a^4)\ -15/(15^4+4a^4)\ +\cdots$
$=(\pi/(2a)^2)S1/(\cos(a\pi)+\mathrm{ch}(a\pi))$　----②

＜L(3)類似香り式　２分割＞

$A1=1/(1^4+4a^4)\ -7/(7^4+4a^4)\ +9/(9^4+4a^4)\ -15/(15^4+4a^4)\ +17/(17^4+4a^4)\ -23/(23^4+4a^4)\ +\cdots$
$=(\pi/(8a^2))\{S1+\sqrt{2}(S1\cdot C2-C1\cdot S2)\}/(\cos(a\pi)+\mathrm{ch}(a\pi))$　---③

$A2=3/(3^4+4a^4)\ -5/(5^4+4a^4)\ +11/(11^4+4a^4)\ -13/(13^4+4a^4)\ +19/(19^4+4a^4)\ -21/(21^4+4a^4)\ +\cdots$
$=(\pi/(8a^2))\{-S1+\sqrt{2}(S1\cdot C2-C1\cdot S2)\}/(\cos(a\pi)+\mathrm{ch}(a\pi))$　---④

ここで、$S1=\sin(a\pi/2)\mathrm{sh}(a\pi/2)$, $C1=\cos(a\pi/2)\mathrm{ch}(a\pi/2)$,
$S2=\sin(a\pi/4)\mathrm{sh}(a\pi/4)$, $C2=\cos(a\pi/4)\mathrm{ch}(a\pi/4)$, a は任意の実数（0 の場合 a->0）。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

これが、これまでに得た２分割（２分身）である。

③、④の右辺の分子に(S1・C2−C1・S2)が見える。これがちょっと複雑な形で私は不満であった。今回、恒等式を発見できたおかげで、それを簡明な形に書き換えることができる。
恒等式再掲。

$$\sin x\cdot \mathrm{sh}x\cdot \cos y\cdot \mathrm{ch}y - \cos x\cdot \mathrm{ch}x\cdot \sin y\cdot \mathrm{sh}y$$
$$=\{\sin(x+y)\cdot \mathrm{sh}(x-y) + \mathrm{sh}(x+y)\cdot \sin(x-y)\}/2 \quad \text{---①}$$

では、(S1・C2−C1・S2)を、上式を見ながら変形していこう。

$$S1\cdot C2-C1\cdot S2$$
$$=\sin(a\pi/2)\mathrm{sh}(a\pi/2)\cos(a\pi/4)\mathrm{ch}(a\pi/4) -\cos(a\pi/2)\mathrm{ch}(a\pi/2)\sin(a\pi/4)\mathrm{sh}(a\pi/4)$$
$$=\{\sin(a\pi/2+a\pi/4)\mathrm{sh}(a\pi/2-a\pi/4) +\mathrm{sh}(a\pi/2+a\pi/4)\sin(a\pi/2-a\pi/4)\}/2$$
$$=\{\sin(3a\pi/4)\mathrm{sh}(a\pi/4) +\mathrm{sh}(3a\pi/4)\sin(a\pi/4)\}/2$$

すっきりとしたものになった。よって、２分割（の右辺）は次のように書き換えられる。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

＜L(3)類似香り式　２分割＞

$$A1=1/(1^4+4a^4) -7/(7^4+4a^4) +9/(9^4+4a^4) -15/(15^4+4a^4) +17/(17^4+4a^4) -23/(23^4+4a^4) +\cdots$$
$$=(\pi/(8\sqrt{2}\cdot a^2))\{\sqrt{2}\cdot\sin\alpha\,\mathrm{sh}\alpha +\sin\gamma\,\mathrm{sh}\beta+\mathrm{sh}\gamma\sin\beta\}/(\cos(a\pi)+\mathrm{ch}(a\pi)) \quad \text{---③}$$

$$A2=3/(3^4+4a^4) -5/(5^4+4a^4) +11/(11^4+4a^4) -13/(13^4+4a^4) +19/(19^4+4a^4) -21/(21^4+4a^4) +\cdots$$
$$=(\pi/(8\sqrt{2}\cdot a^2))\{-\sqrt{2}\cdot\sin\alpha\,\mathrm{sh}\alpha +\sin\gamma\,\mathrm{sh}\beta+\mathrm{sh}\gamma\sin\beta\}/(\cos(a\pi)+\mathrm{ch}(a\pi)) \quad \text{---④}$$

ここで、$\alpha=a\pi/2,\ \beta=a\pi/4,\ \gamma=3a\pi/4,$　a は任意の実数（0 の場合 a->0)。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

だいぶ簡明な形になった。
（その２４７）の３分割も、書き換えた結果だけ示しておく。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

＜L(3)類似香り式　３分割＞

$$A1=1/(1^4+4a^4) -11/(11^4+4a^4) +13/(13^4+4a^4) -23/(23^4+4a^4) +25/(25^4+4a^4) -35/(35^4+4a^4) +\cdots$$
$$=(\pi/(24a^2))\{\sin\gamma\,\mathrm{sh}\beta+\mathrm{sh}\gamma\sin\beta+2\sin\alpha\,\mathrm{sh}\alpha +\sqrt{3}(\sin\omega\,\mathrm{sh}\eta+\mathrm{sh}\omega\sin\eta)\}/(\cos(a\pi)+\mathrm{ch}(a\pi)) \quad \text{---⑤}$$

$$A2=3/(3^4+4a^4) -9/(9^4+4a^4) +15/(15^4+4a^4) -21(21+4a^4) +27(27+4a^4) -33(33+4a^4) +\cdots$$
$$=(\pi/(12a^2))\{\sin\gamma\,\mathrm{sh}\beta+\mathrm{sh}\gamma\sin\beta-\sin\alpha\,\mathrm{sh}\alpha\}/(\cos(a\pi)+\mathrm{ch}(a\pi)) \quad \text{---⑥}$$

$$A3=5/(5^4+4a^4) -7/(7^4+4a^4) +17/(17^4+4a^4) -19/(19^4+4a^4) +29/(29^4+4a^4) -31/(31^4+4a^4) +\cdots$$
$$=(\pi/(24a^2))\{\sin\gamma\,\mathrm{sh}\beta+\mathrm{sh}\gamma\sin\beta+2\sin\alpha\,\mathrm{sh}\alpha -\sqrt{3}(\sin\omega\,\mathrm{sh}\eta+\mathrm{sh}\omega\sin\eta)\}/(\cos(a\pi)+\mathrm{ch}(a\pi)) \quad \text{---⑦}$$

ここで$\alpha=a\pi/2$, $\beta=a\pi/6$, $\gamma=5a\pi/6$, $\eta=a\pi/3$, $\omega=2a\pi/3$, aは任意の実数（0の場合a->0)。
＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

３分割もだいぶ簡明になった。

さて、冒頭で述べたように今回もう一つ恒等式を見出した。次の⑧だが、[四重積-二重積]対称式Ⅱと名付けたい。①と一緒に示す。

[四重積-二重積]対称式Ⅰ

$$\sin x\cdot \mathrm{sh}x\cdot \cos y\cdot \mathrm{ch}y - \cos x\cdot \mathrm{ch}x\cdot \sin y\cdot \mathrm{sh}y$$
$$=\{\sin(x+y)\cdot \mathrm{sh}(x-y) + \mathrm{sh}(x+y)\cdot \sin(x-y)\}/2 \quad \text{---①}$$

[四重積-二重積]対称式Ⅱ

$$\cos x\cdot \mathrm{sh}x\cdot \cos y\cdot \mathrm{sh}y + \sin x\cdot \mathrm{ch}x\cdot \sin y\cdot \mathrm{ch}y$$
$$=\{\cos(x-y)\cdot \mathrm{ch}(x+y) - \mathrm{ch}(x-y)\cdot \cos(x+y)\}/2 \quad \text{---⑧}$$

まったく美しいものである。導出方法を示しておく。

****
＜導出方法＞

方針は、左辺に対し三角/双曲線関数の加法定理を適用していき、公式を導く。①の導出を示す。

$$\sin x\cdot \mathrm{sh}x\cdot \cos y\cdot \mathrm{ch}y - \cos x\cdot \mathrm{ch}x\cdot \sin y\cdot \mathrm{sh}y$$
$$=\sin x\cdot \cos y\cdot \mathrm{sh}x\cdot \mathrm{ch}y - \cos x\cdot \sin y\cdot \mathrm{ch}x\cdot \mathrm{sh}y$$
$$=\{\sin(x+y)-\cos x\cdot \sin y\}\{\mathrm{sh}(x+y)-\mathrm{ch}x\cdot \mathrm{sh}y\}-\{\sin(x+y)-\sin x\cdot \cos y\}\{\mathrm{sh}(x+y)-\mathrm{sh}x\cdot \mathrm{ch}y\}$$
$$=\sin(x+y)\{\mathrm{sh}x\cdot \mathrm{ch}y-\mathrm{ch}x\cdot \mathrm{sh}y\} +\mathrm{sh}(x+y)\{\sin x\cdot \cos y-\cos x\cdot \sin y\}$$
$$+(\cos x\cdot \sin y\cdot \mathrm{ch}x\cdot \mathrm{sh}y -\sin x\cdot \cos y\cdot \mathrm{sh}x\cdot \mathrm{ch}y)$$
$$=\sin(x+y)\mathrm{sh}(x-y) +\mathrm{sh}(x+y)\sin(x-y) -(\sin x\cdot \mathrm{sh}x\cdot \cos y\cdot \mathrm{ch}y - \cos x\cdot \mathrm{ch}x\cdot \sin y\cdot \mathrm{sh}y)$$

よって、

$$2(\sin x\cdot \mathrm{sh}x\cdot \cos y\cdot \mathrm{ch}y - \cos x\cdot \mathrm{ch}x\cdot \sin y\cdot \mathrm{sh}y)=\sin(x+y)\mathrm{sh}(x-y) +\mathrm{sh}(x+y)\sin(x-y)$$

これより、

$$\sin x\cdot \mathrm{sh}x\cdot \cos y\cdot \mathrm{ch}y - \cos x\cdot \mathrm{ch}x\cdot \sin y\cdot \mathrm{sh}y=\{\sin(x+y)\mathrm{sh}(x-y) +\mathrm{sh}(x+y)\sin(x-y)\}/2$$

となり、①が導けた。

⑧も同様にして導ける。略。

導出終わり。
****

このように導出自体は簡単である。問題は、最初の出発点に

$\sin x\cdot \mathrm{sh}x\cdot \cos y\cdot \mathrm{ch}y - \cos x\cdot \mathrm{ch}x\cdot \sin y\cdot \mathrm{sh}y$ や $\cos x\cdot \mathrm{sh}x\cdot \cos y\cdot \mathrm{sh}y + \sin x\cdot \mathrm{ch}x\cdot \sin y\cdot \mathrm{ch}y$

をもってくる動機があるかにかかっている。私には、前者を考えたい動機があった。
　動機とは、分身たちの右辺に“sinx・shx・cosy・chy － cosx・chx・siny・shy”の形が頻出することである。それが気になった。
　なにかあるのではないか？と気になり計算を遂行し、①を得たのであった。

　最後にテーマの整理と備忘録の意味から、構想や予想、妄想、つぶやきを述べておく。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

●　①を出す動機はあったが、⑧を出す動機はなかった。
しかし①の右辺を見ていて、sin,sh があれば対称性の観点から cos,ch の公式もあるはずだと直感で思った。
そこで今度は逆方向の{cos(x−y)・ch(x+y) － ch(x−y)・cos(x+y)}/2 から出発して⑧を得ることができた。

　いま調べている領域はあまりにも高い対称性から成っていて、よって上記のようなカンはいつでも通用するのである。計算する前から、公式の存在は確信できた。

●（その２４７）で私は、次のように述べた。
****
ゼータ香り式の分身の右辺を見ていると、三角関数と双曲線関数がつねに一緒に（対称的に）対になって表れている。両者はとても親和性があるというか、二つが結合することで、とても“よい性質”を発揮しているように思える。
　cos,sin,ch,sh を組み合わせて、加法定理が成り立つような新しい関数を構成できないだろうか？
なにか出そうな雰囲気があるが、まだよくわからない。
****

　これをすこし前からねらっていたのだが、なんとその加法定理を高専生が発見していたと分かった！！
　https://www.jstage.jst.go.jp/article/toyotakosenkiyo/51/0/51_51-14/_pdf/-char/ja

　高村明氏の成果である。凄い結果である。
　ゼータ香り式の分割をやっていると、三角関数と双曲線関数が絡んだ世界（親和世界！）が豊かであることは感じていた。結局、上記の加法定理の発見によって、その世界が真に豊かな領域であることが証明されたといえるだろう。
　アーベルやガウスは能力がありすぎて、楕円積分、楕円関数の高い山（加法定理が成り立つ）に一挙に駆け上っていったのであるが、その山の途上にも豊かな花園があったということだと思う。
＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

2022.6.26 杉岡幹生

＜参考文献＞

・「数学公式Ⅱ」（森口・宇田川・一松、岩波書店）
・「マグロウヒル　数学公式・数表ハンドブック」（Murray R. Spiegel 著、氏家勝巳訳、オーム社）