＜ ふしぎなフーリエ級数四つを導出＞　Rev1.01

----新しいフーリエ級数の発見----

以下の稿は、新発見でもなんでもありませんでした。ほとんど自明な結果です。⑤の x を x+B,x-B とすれば、すぐに出ます。お詫びし、訂正とさせていただきます。

改訂(rev.1.01)2022.06.25 杉岡幹生

****

今回、面白いフーリエ級数が出たので紹介したい。公式集にはないので、おそらく新しいものである。以下の四つである。なお、sh, ch は双曲線関数 sinh, cosh の略である。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

ある既知のフーリエ級数に虚数マジックを適用して、まず次が出た。

$$2\{\sin B\cdot\sin x/e^{A}+\sin 2B\cdot\sin 2x/e^{2A}+\sin 3B\cdot\sin 3x/e^{3A}+\cdots\}$$
$$=(\mathrm{sh}A\cdot\sin B\cdot\sin x)/\{(\mathrm{ch}A\cdot\cos B-\cos x)^2+(\mathrm{sh}A\cdot\sin B)^2\}\quad\text{----①}$$

$$2\{\cos B\cdot\sin x/e^{A}+\cos 2B\cdot\sin 2x/e^{2A}+\cos 3B\cdot\sin 3x/e^{3A}+\cdots\}$$
$$=\sin x(\mathrm{ch}A\cdot\cos B-\cos x)/\{(\mathrm{ch}A\cdot\cos B-\cos x)^2+(\mathrm{sh}A\cdot\sin B)^2\}\quad\text{----②}$$

さらに、別の既知のフーリエ級数に虚数マジックを適用して、次が出た。

$$2\{\cos B\cdot\cos x/e^{A}+\cos 2B\cdot\cos 2x/e^{2A}+\cos 3B\cdot\cos 3x/e^{3A}+\cdots\}$$
$$=-1+\mathrm{sh}A(\mathrm{ch}A-\cos B\cdot\cos x)/\{(\mathrm{ch}A\cdot\cos B-\cos x)^2+(\mathrm{sh}A\cdot\sin B)^2\}\quad\text{----③}$$

$$2\{\sin B\cdot\cos x/e^{A}+\sin 2B\cdot\cos 2x/e^{2A}+\sin 3B\cdot\cos 3x/e^{3A}+\cdots\}$$
$$=\sin B(\mathrm{ch}A\cdot\cos x-\cos B)/\{(\mathrm{ch}A\cdot\cos B-\cos x)^2+(\mathrm{sh}A\cdot\sin B)^2\}\quad\text{----④}$$

ここで、$-\pi\leqq x\leqq\pi$, $A>0$, B は任意の実数。e は自然対数の底。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

以上の四つである。

面白い形というか、あまりにもきれいというか、とても魅惑的な形をしている。Excel を使って、さまざまなパターンで数値検証を行ったが、正しい式であった。

簡単に導出方法を示しておく。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

＜導出方法＞

$$\sin x/(\mathrm{ch}a-\cos x)=2\{\sin x/e^{a}+\sin 2x/e^{2a}+\sin 3x/e^{3a}+\cdots\}\quad\text{-----⑤}$$

ここで、$-\pi \leqq x \leqq \pi$, $a>0$。

この⑤の既知のフーリエ級数に、虚数マジックを適用する。ここで虚数マジックとは、少し前にゼータの香りの漂う公式に用いて新しいフーリエ級数を導いた手法（道具）であり、実数をいったん虚数に置き換えて、最後に虚数がない実数世界に舞い戻るというふしぎな手法である。

$a=A+iB$ として計算していく（i：虚数単位）。その途中、$\sin(ix)=i\cdot \mathrm{sh}x$、$i\cdot\sin x=\mathrm{sh}(ix)$、$\cos(ix)=\mathrm{ch}x$、$\cos x=\mathrm{ch}(ix)$の関係を用いた。計算していき、最後は i は関係がなくなり、①、②が得られた。

さらに、

$$\mathrm{sh}a/(\mathrm{ch}a-\cos x)=1+2\{\cos x/e^{a}+\cos 2x/e^{2a}+\cos 3x/e^{3a}+\cdots\} \qquad \text{-----⑥}$$

ここで、$-\pi \leqq x \leqq \pi$, $a>0$。

という別種の既知のフーリエ級数に対し、上記と同様に虚数マジックを適用して、③、④を得る。

導出終わり。

＝＝

このようにして導出した。

簡単に書いているが、ここに至るまでにいろいろな気づきが必要だった。なお、⑤、⑥のフーリエ級数は「数学公式Ⅱ（級数・フーリエ解析)」（森口・宇田川・一松著、岩波書店）に出ているものである。

最後にテーマの整理と備忘録の意味から、構想や予想、妄想、つぶやきを述べておく。

＝＝

● ①～④は、眺めているだけで時を忘れるというか、様々なイマジネーションが喚起されるという感じである。豊かなものを含んでいる。

$$2\{\sin B\cdot\sin x/e^{A}+\sin 2B\cdot\sin 2x/e^{2A}+\sin 3B\cdot\sin 3x/e^{3A}+\cdots\}$$
$$=(\mathrm{sh}A\cdot\sin B\cdot\sin x)/\{(\mathrm{ch}A\cdot\cos B-\cos x)^2+(\mathrm{sh}A\cdot\sin B)^2\} \qquad \text{----①}$$

この①の左辺は、B と x を交換しても形が変わらない！

非常にふしぎである。③も同様である。ということは、右辺も同じになるということなのだろう。

● ②と④を並べよう。

$$2\{\cos B\cdot\sin x/e^{A}+\cos 2B\cdot\sin 2x/e^{2A}+\cos 3B\cdot\sin 3x/e^{3A}+\cdots\}$$
$$=\sin x(\mathrm{ch}A\cdot\cos B-\cos x)/\{(\mathrm{ch}A\cdot\cos B-\cos x)^2+(\mathrm{sh}A\cdot\sin B)^2\} \qquad \text{----②}$$

$$2\{\sin B\cdot\cos x/e^{A}+\sin 2B\cdot\cos 2x/e^{2A}+\sin 3B\cdot\cos 3x/e^{3A}+\cdots\}$$
$$=\sin B(\mathrm{ch}A\cdot\cos x-\cos B)/\{(\mathrm{ch}A\cdot\cos B-\cos x)^2+(\mathrm{sh}A\cdot\sin B)^2\} \qquad \text{----④}$$

②の x と B を交換すれば④になる。逆もまたしかり。面白いではないか。

＝＝

2022.6.18 杉岡幹生

＜参考文献＞

・「数学公式Ⅱ」（森口・宇田川・一松、岩波書店）