＜ ゼータ香り式分割母等式Ⅱ（分母４乗型）の発見（新フーリエ級数）＞

今回は、課題であった目標のフーリエ級数を発見できたので、それを紹介したい。

まず課題というのは、Z(4)類似香り式（つまりζ(4)類似香り式）の分割を与える母等式たるフーリエ級数を求められないか？という問題である。それを求めるのは時間がかかると思ったが、ある方法をふと思いつき、それを使うことで得ることができた。その方法とは（その２３８）で見つけた、虚数の魔法のような働きを用いるもので、そこでは“一種のマジック”と呼んだものである。

そのマジックは新しい公式を編み出すのに、きわめて有効である。その手法を“虚数マジック”とでも呼んでいきたい。ガウスやアーベルがはじめた“虚数乗法”というものの親戚筋に当たるような気もするが、その辺はまだよくわからない。

とりあえず、まず発見したフーリエ級数つまり母等式Ⅱ(分母４乗型)を示す。次のものである。

なお、“ゼータ香り式分割母等式Ⅱ（分母４乗型）”は、“母等式Ⅱ（分母４乗型）”と略すことも多くなると思う。ch, sh は、双曲線関数 cosh, sinh のことである。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

ゼータ香り式分割母等式Ⅱ（分母４乗型）

$$\sin x/(1^4+4a^4) - \sin 3x/(3^4+4a^4) + \sin 5x/(5^4+4a^4) - \sin 7x/(7^4+4a^4) + \cdots$$
$$= (\pi/(2a)^3)\{(C1+S1)\cos(ax)\mathrm{sh}(ax) - (C1-S1)\sin(ax)\mathrm{ch}(ax)\}/\{\cos(a\pi)+\mathrm{ch}(a\pi)\} \quad \text{---①}$$
$$(-\pi/2 \leqq x \leqq \pi/2)$$

ここで、$C1=\cos(a\pi/2)\mathrm{ch}(a\pi/2)$、$S1=\sin(a\pi/2)\mathrm{sh}(a\pi/2)$, a は任意の実数（0 の場合 a->0）。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

これが今回得たフーリエ級数である。それと同時に Z(4)類似香り式の分割（分身）を生み出す母等式となっている。
右辺はやや複雑に感じられるかもしれないが、三角関数と双曲線関数が対称的に並んでいてきれいである。

じつは前回までの分母２乗型の母等式Ⅱとの類推から、今度は
$\cos x/(1^4+a^4) + \cos 3x/(3^4+a^4) + \cos 5x/(5^4+a^4) + \cos 7x/(7^4+a^4)$
という分母４乗型のフーリエ級数を出すことをまず目標とした。そして今回それを得ることができた（下方＜導出の方法＞での⑤）のだが、式の右辺がやや複雑になった。そこで変数変換をして（同値変形を行い）、上記①（右辺がシンプル）に到達したというわけである。分母が“(n^4+a^4)”ではなく”(n^4+4a^4)”となっているのも、そのためである。

今回発見した①のフーリエ級数は、私がもっている公式集には載っていないが、どこかの論文等で出ているのかもしれない。よくわからない。

さて、今回見出したフーリエ級数の導出の方法を示しておく。

****

＜導出の方法＞

下記①の母等式Ⅱ(分母４乗型)の導出の方法を以下に示す。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

ゼータ香り式分割母等式Ⅱ（分母４乗型）

$\sin x/(1^4+4a^4) - \sin 3x/(3^4+4a^4) + \sin 5x/(5^4+4a^4) - \sin 7x/(7^4+4a^4) + \cdot\cdot$

$= (\pi/(2a)^3)\{(C1+S1)\cos(ax)\mathrm{sh}(ax) - (C1-S1)\sin(ax)\mathrm{ch}(ax)\}/\{\cos(a\pi)+\mathrm{ch}(a\pi)\}$ ---①

$(-\pi/2 \leqq x \leqq \pi/2)$

ここで、$C1=\cos(a\pi/2)\mathrm{ch}(a\pi/2)$、$S1=\sin(a\pi/2)\mathrm{sh}(a\pi/2)$, a は任意の実数（0 の場合 a->0)。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

前回までの次の母等式Ⅱを利用する。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

ゼータ香り式分割母等式Ⅱ

$\cos x/(1^2+a^2) + \cos 3x/(3^2+a^2) + \cos 5x/(5^2+a^2) + \cdot\cdot = (\pi/(4a))\mathrm{sh}(a(\pi/2-x))/\mathrm{ch}(a\pi/2)$ ---②

$(0 \leqq x \leqq \pi)$

a は任意の実数。(後者は 0 の場合、a->0)

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

まず、虚数マジックの最初のステップとして、②で a＝ib（i は虚数単位）として計算する。そしてその最終の式で b を a に置き換える（戻す）と、次の③を得る。

$\cos x/(1^2-a^2) + \cos 3x/(3^2-a^2) + \cos 5x/(5^2-a^2) + \cdot\cdot = (\pi/(4a))\sin(a(\pi/2-x))/\cos(a\pi/2)$ ---③

③に到達するまでに、$\sin(ix)=i\,\mathrm{sh}(x)$、$\cos(ix)=\mathrm{ch}(x)$の関係を使った。虚数マジックではこの関係をよく使う。

②と③を並べよう。

$\cos x/(1^2+a^2) + \cos 3x/(3^2+a^2) + \cos 5x/(5^2+a^2) + \cdot\cdot = (\pi/(4a))\mathrm{sh}(a(\pi/2-x))/\mathrm{ch}(a\pi/2)$ ---②

$\cos x/(1^2-a^2) + \cos 3x/(3^2-a^2) + \cos 5x/(5^2-a^2) + \cdot\cdot = (\pi/(4a))\sin(a(\pi/2-x))/\cos(a\pi/2)$ ---③

②から③を引き算して、次を得る。

$-2a^2\{\cos x/(1^4-a^4)+\cos 3x/(3^4-a^4)+\cos 5x/(5^4-a^4)+\cos 7x/(7^4-a^4)+\cdots\}$

$$=(\pi/(4a))\{\mathrm{sh}(a(\pi/2-x))/\mathrm{ch}(a\pi/2)-\sin(a(\pi/2-x))/\cos(a\pi/2)\} \quad \text{----④}$$

次に、虚数マジックの第２段階として、④で a＝√i・A（i は虚数単位）として、長い計算を行うと、次の⑤に到達する。

$\cos x/(1^4+A^4)+\cos 3x/(3^4+A^4)+\cos 5x/(5^4+A^4)+\cos 7x/(7^4+A^4)+\cdots$

$=(\pi\sqrt{2}/(4A^3))\{(C1+S1)\cos(\beta(\pi/2-x))\mathrm{sh}(\beta(\pi/2-x))-(C1-S1)\sin(\beta(\pi/2-x))\mathrm{ch}(\beta(\pi/2-x))\}/\{\cos(\beta\pi)+\mathrm{ch}(\beta\pi)\}$ ---⑤

ここで、$\beta=A/\sqrt{2}$ である。

⑤で、A/√2＝b として A を b に置き換え、さらにπ/2-x＝t として、x から t に置き換えて計算していくと、本質的に①と同じフーリエ級数に行きつく。

導出終わり。

****

このようにして目標としていたフーリエ級数が求まった。上記のように虚数を道具的に使うことによって、本質的に重要な公式を導けるというこのふしぎな感覚を味わっていただきたい。

なお、今回のフーリエ級数に対しては、x と a の複数の組み合わせで、数値検証を行っているが、すべて正しい。左辺は右辺値に収束する。

再び式を眺めよう。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

ゼータ香り式分割母等式Ⅱ（分母４乗型）

$\sin x/(1^4+4a^4)-\sin 3x/(3^4+4a^4)+\sin 5x/(5^4+4a^4)-\sin 7x/(7^4+4a^4)+\cdots$

$$=(\pi/(2a)^3)\{(C1+S1)\cos(ax)\mathrm{sh}(ax)-(C1-S1)\sin(ax)\mathrm{ch}(ax)\}/\{\cos(a\pi)+\mathrm{ch}(a\pi)\} \quad \text{---①}$$

$$(-\pi/2\leqq x\leqq\pi/2)$$

ここで、$C1=\cos(a\pi/2)\mathrm{ch}(a\pi/2)$、$S1=\sin(a\pi/2)\mathrm{sh}(a\pi/2)$, a は任意の実数（0 の場合 a->0）。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

繰り返しになるが、フーリエ級数が出たことが決定的に重要である。

これで、Z(2)類似香り式の分身を出すのとまったく同じやり方で、Z(4)類似香り式の分身たちを次々に生み出すことができる。機械的に無数の分身たちを生み出せる点がポイントである。

分身を生成する母体となるフーリエ級数がいかに大切かがわかっていただけると思う。

なお、今回見出した母等式Ⅱ(分母４乗型)を使って、Z(4)類似香り式の２分身を出すのは、次回以降としたい。

最後に、テーマの整理と備忘録の意味から、構想や予想、妄想、つぶやきを述べておく。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

●“虚数マジック”は、一カ月ほど前に見出していたものだが、見つけたとき、とてもふしぎな感覚をおぼえた。と同時に、これは優れた道具だと確信した。そして今回、新規のフーリエ級数導出にも威力を発揮したことは、まことに驚くべきことである。

●　①で、x＝π/2、a＝√(a/2)とすると、ちょうど４年前の（その３）の結果に一致する。

前回送った結果の継続的な結果が出ましたので報告します。前回のA,Bの一般式が出ました。

A(a)=1/(1^4+a^2) + 1/(3^4+ a^2) + 1/(5^4+a^2) + 1/(7^4+a^2) + ・・

B(a)=1/(1^4+a^2) + 3^2/(3^4+a^2) + 5^2/(5^4+a^2) + 7^2/(7^4+a^2)+・・

これらの正体は、次となります。

A(a)=α/(4a^2)(sinhα − sinα)/(coshα + cosα)

B(a)=α/(4a)(sinhα + sinα)/(coshα + cosα)

ここで、α=π√(a/2)　です。

a=3として数値検証しましたが、正しいです。a=1とすれば、下方メール中のA,Bとなります。

●　母等式Ｉに虚数マジックを適用することで、L(3)類似香り式の分身を生み出す母等式としてのフーリエ級数が得られることは、ほぼ確実である。

ゼータ香り式分割母等式Ｉ

$$\sin x/(1^2+a^2)+3\sin 3x/(3^2+a^2)+5\sin 5x/(5^2+a^2)+\cdots=(\pi/4)\mathrm{ch}(a(\pi/2-x))/\mathrm{ch}(a\pi/2)$$

$(0<x<\pi)$

こちらの方もゆっくりとやっていきたい。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

2022.4.10 杉岡幹生

参考文献

・「数学公式Ⅱ」（森口・宇田川・一松、岩波書店）

・「マグロウヒル　数学公式・数表ハンドブック」（Murray R. Spiegel 著、氏家勝巳訳、オーム社）