＜ 母等式Ｉからのㇾ(1)類似香り式２分割、ある恒等式＞

仕切り直しで、最終形の母等式Ｉ、Ⅱを用いて、Ｌ(1)類似香り式やＺ(2)類似香り式の分割を行っていく。

今回は、先に弱公式でも出したものではあるが、Ｌ(1)類似香り式の２分割（２分身）を導出する。また母等式Ｉと母等式Ⅱを組み合わせて面白い式が出たので紹介したい。

なお、以降で出てくる ch, sh は、それぞれ双曲線関数 cosh, sinh のことである。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

ゼータ香り式分割母等式Ｉ

$\sin x/(1^2+a^2)\ +3\sin 3x/(3^2+a^2)\ +5\sin 5x/(5^2+a^2)\ +\cdot\cdot = (\pi/4)\mathrm{ch}(a(\pi/2-x))/\mathrm{ch}(a\pi/2)$

$(0<x<\pi)$

ゼータ香り式分割母等式Ⅱ

$\cos x/(1^2+a^2)\ +\cos 3x/(3^2+a^2)\ +\cos 5x/(5^2+a^2)\ +\cdot\cdot = (\pi/(4a))\mathrm{sh}(a(\pi/2-x))/\mathrm{ch}(a\pi/2)$

$(0\leqq x\leqq\pi)$

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

では、まず結果から示す。Ｌ(1)類似香り式の２分割は以下のものとなる。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

＜Ｌ(1)類似香り式の２分割＞

$1/(1^2+a^2)\ -3/(3^2+a^2)\ +5/(5^2+a^2)\ -7/(7^2+a^2)\ +9/(9^2+a^2)\ -11/(11^2+a^2)\ +\cdot\cdot\ = (\pi/4)/\mathrm{ch}(a\pi/2)$ ----①

ａは任意の実数。

このＬ(1)類似香り式の２分割は、次の②、③となる。

$B1 = 1/(1^2+a^2)\ -7/(7^2+a^2)\ +9/(9^2+a^2)\ -15/(15^2+a^2)\ +17/(17^2+a^2)\ -23/(23^2+a^2)\ +\cdot\cdot$

$= (\pi/8)\{1+\sqrt{2}\cdot\mathrm{ch}(a\pi/4)\}/\mathrm{ch}(a\pi/2)$ ----②

$B2 = 3/(3^2+a^2)\ -5/(5^2+a^2)\ +11/(11^2+a^2)\ -13/(13^2+a^2)\ +19/(19^2+a^2)\ -21/(21^2+a^2)\ +\cdot\cdot$

$= (\pi/8)\{-1+\sqrt{2}\cdot\mathrm{ch}(a\pi/4)\}/\mathrm{ch}(a\pi/2)$ ----③

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

②から③を辺々引き算すると①になることが容易にわかる。B1+(-B2)＝①となるので、B1, -B2 がＬ(1)類似香り式の２分身である。

これは、Ｌ(1)２分割の完全な類似になっていることにも注意したい。Ｌ(1)２分割⇒（その１１）

では、上記結果の導出の方法を示す。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

＜導出の方法＞

ゼータ香り式分割母等式Ｉ

$\sin x/(1^2+a^2)+3\sin 3x/(3^2+a^2)+5\sin 5x/(5^2+a^2)+\cdots=(\pi/4)\mathrm{ch}(a(\pi/2-x))/\mathrm{ch}(a\pi/2)$

$(0<x<\pi)$

この母等式Ｉの x にπ/2 を代入すると、次となる（上方の①と同じ)。

$1/(1^2+a^2)-3/(3^2+a^2)+5/(5^2+a^2)-7/(7^2+a^2)+9/(9^2+a^2)-11/(11^2+a^2)+13/(13^2+a^2)-15/(15^2+a^2)+\cdots$
$=(\pi/4)/\mathrm{ch}(a\pi/2)$ ----④

母等式Ｉの x にπ/4 を代入すると、次となる(3π/4 を代入しても同じ)。

$(1/\sqrt{2})\{1/(1^2+a^2)+3/(3^2+a^2)-5/(5^2+a^2)-7/(7^2+a^2)+9/(9^2+a^2)+11/(11^2+a^2)-13/(13^2+a^2)-15/(15^2+a^2)$
$+\cdots\}=(\pi/4)\mathrm{ch}(a\pi/4)/\mathrm{ch}(a\pi/2)$ ----⑤

さて、ここで B1 と B2 を次のものとしよう。

$B1=1/(1^2+a^2)-7/(7^2+a^2)+9/(9^2+a^2)-15/(15^2+a^2)+17/(17^2+a^2)-23/(23^2+a^2)+\cdots$
$B2=3/(3^2+a^2)-5/(5^2+a^2)+11/(11^2+a^2)-13/(13^2+a^2)+19/(19^2+a^2)-21/(21^2+a^2)+\cdots$

④、⑤を B1,B2 を用いて書き直して整理すると、それぞれ次となる。

$B1-B2=(\pi/4)/\mathrm{ch}(a\pi/2)$
$B1+B2=\sqrt{2}\cdot(\pi/4)\mathrm{ch}(a\pi/4)/\mathrm{ch}(a\pi/2)$

これを B1, B2 の連立方程式として解いて次を得る。

$B1=(\pi/8)\{1+\sqrt{2}\cdot\mathrm{ch}(a\pi/4)\}/\mathrm{ch}(a\pi/2)$
$B2=(\pi/8)\{-1+\sqrt{2}\cdot\mathrm{ch}(a\pi/4)\}/\mathrm{ch}(a\pi/2)$

上式は次式と同じであり、これは①の２分身②、③そのものである。

$B1=1/(1^2+a^2)-7/(7^2+a^2)+9/(9^2+a^2)-15/(15^2+a^2)+17/(17^2+a^2)-23/(23^2+a^2)+\cdots$
$=(\pi/8)\{1+\sqrt{2}\cdot\mathrm{ch}(a\pi/4)\}/\mathrm{ch}(a\pi/2)$ ----②

$B2=3/(3^2+a^2)-5/(5^2+a^2)+11/(11^2+a^2)-13/(13^2+a^2)+19/(19^2+a^2)-21/(21^2+a^2)+\cdots$
$=(\pi/8)\{-1+\sqrt{2}\cdot\mathrm{ch}(a\pi/4)\}/\mathrm{ch}(a\pi/2)$ ----③

以上。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

このようにしてＬ(1)類似香り式の２分身が得られた。それはまるで織物の糸がほどかれるようにして連立方程式から得られていく。

面白いことに②、③で、a->0 とするとL(1)の２分割（２分身）に一致する。よって、上記の結果はゼータ分割をも包含する一般的なものとなっている。
数値計算も行ったが($a=0.3$, $a=10$ で)、OK であった。左辺の級数は右辺値に収束する。

再度、結果をまとめておこう。

****

＜L(1)類似香り式＞

$$1/(1^2+a^2)\ -3/(3^2+a^2)\ +5/(5^2+a^2)\ -7/(7^2+a^2)\ +9/(9^2+a^2)\ -11/(11^2+a^2)\ +\cdots\ =(\pi/4)/\mathrm{ch}(a\pi/2) \qquad \text{----①}$$

＜L(1)類似香り式の２分身＞

$$1/(1^2+a^2)\ -7/(7^2+a^2)\ +9/(9^2+a^2)\ -15/(15^2+a^2)\ +17/(17^2+a^2)\ -23/(23^2+a^2)\ +\cdots$$
$$=(\pi/8)\{1+\sqrt{2}\cdot\mathrm{ch}(a\pi/4)\}/\mathrm{ch}(a\pi/2) \qquad \text{----②}$$

$$3/(3^2+a^2)\ -5/(5^2+a^2)\ +11/(11^2+a^2)\ -13/(13^2+a^2)\ +19/(19^2+a^2)\ -21/(21^2+a^2)\ +\cdots$$
$$=(\pi/8)\{-1+\sqrt{2}\cdot\mathrm{ch}(a\pi/4)\}/\mathrm{ch}(a\pi/2) \qquad \text{----③}$$

****

これらは味わい深い式である。②から③を引いたら①になる、というその不思議を味わっていただきたい。

さて、今回、もう一つある興味ある式（恒等式）を導いたので紹介したい。(母等式Ⅰ)^2−(母等式Ⅱ)^{2}の計算を辺々行った結果、得られた。次のものである。

L(1)類似香り式とZ(2)類似香り式が固く結びついた式

$$\{\sin x/(1^2+a^2)\ +3\sin 3x/(3^2+a^2)\ +5\sin 5x/(5^2+a^2)+\cdots\}^2$$
$$=(\pi/4)^2/\mathrm{ch}^2(a\pi/2)\ +\ a^2\{\cos x/(1^2+a^2)\ +\cos 3x/(3^2+a^2)\ +\cos 5x/(5^2+a^2)+\cdots\}^2$$
$$(0<x<\pi)$$

この式は、左辺にL(1)類似香り式、右辺にZ(2)類似香り式があって、それらが固く結びついていることを示している。$(\pi/4)^2/\mathrm{ch}^2(a\pi/2)$という山を越えれば、別の世界に行ける。左辺界は虚２次体の世界、右辺の第２項は実２次体の世界である。
sin 級数からは虚２次体ゼータ類似香り式が、cos 級数からは実２次体ゼータ類似香り式が飛び出してくる。虚２次体ゼータの親分はL(s)、実２次体ゼータの親分はζ(s)である。

ゼータの分割の後半でも指摘したことだが、L(s)世界とZ(s)世界（つまりζ(s)世界）は分かちがたく結びついている。それはゼータ分割をも包含した香り式でも成り立っていて、上式はL(1)界とZ(2)界が結びついていることを示している。

ゼータ香り式の分割（ゼータ分割含む）の研究は、ゼータ特殊値の研究であり、そのふしぎをさぐる研究である。岩澤理論もそうであるが、目的は同じでも、全く別の道を歩んでいる。

特殊値とは明示的な特殊値のことであり、$\zeta(2)=\pi^2/6$、$\zeta(4)=\pi^4/90$、$L(1)=\pi/4$、$L(3)=\pi^3/32$ などときっちり（明示的に）求まるものを指す。$\zeta(2n)$、$L(2n+1)$ 以外の値は（n は 1 以上の整数）、明示的には求まらない。それらは[偶数ゼータの無限和]などの非明示的な表現でしか求まらない。

さてところで、リーマン予想は、非自明な零点に関する予想である。私の予感では、非自明な零点は自明な零点と関係しているはずである。明示的な特殊値は自明な零点によって与えられることがわかっている。テイラーシステムからそれはわかる。すなわち、明示的な特殊値の研究は自明な零点の研究であるともいえる。もし自明な零点と非自明な零点がかかわっているとわかれば、明示的な特殊値の研究はリーマン予想研究であるともいえる。

自明な零点の研究＝非自明な零点の研究

私は、まだこのイコール（橋）を見つけられていない。この二世界を行き来する橋を見つけられていないのだが、カンであるはずと思っている。左辺界の美しい対称性は右辺界と関係しているような気がする。

最近、強く思うのは、$L(s)$ リーマン予想が解ければ $\zeta(s)$ リーマン予想も解けるはず、ということである。逆もまた真なり。どちらが解きやすいのか？ 前者と私は思う。数学者は後者からやっているが、前者の方が解きやすいはずである。

最後に、テーマの整理と備忘録の意味から、構想や予想、妄想、つぶやきを述べておく。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

● 今回の２分身の a を変数と見て、微分することで、高次の分身を得ることができる。

$$B1=1/(1^2+a^2)-7/(7^2+a^2)+9/(9^2+a^2)-15/(15^2+a^2)+17/(17^2+a^2)-23/(23^2+a^2)+\cdots$$
$$=(\pi/8)\{1+\sqrt{2}\cdot \mathrm{ch}(a\pi/4)\}/\mathrm{ch}(a\pi/2)$$

この B1 を例にとって、それを１回微分すると、次のようになる。

$$1/(1^2+a^2)^2-7/(7^2+a^2)^2+9/(9^2+a^2)^2-15/(15^2+a^2)^2+17/(17^2+a^2)^2-23/(23^2+a^2)^2+\cdots$$
$$=(\pi/8)^2\{2\sqrt{2}\cdot \mathrm{ch}(a\pi/4)\,\mathrm{sh}(a\pi/2)+2\cdot \mathrm{sh}(a\pi/2)-\sqrt{2}\cdot \mathrm{ch}(a\pi/2)\,\mathrm{sh}(a\pi/4)\}/(a\cdot \mathrm{ch}^2(a\pi/2))$$

$a\to 0$ とすると、$1-1/7^3+1/9^3-1/15^3+17^3-1/23^3+\cdots=(3\sqrt{2}+4)\pi^3/256$
となる。

これは（その９）で見た $L(3)=\pi^3/32$ の２分身の一方の方である。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

2022. 3. 13 杉岡幹生