＜ 香り式分割母等式の導出、Z(2)類似香り式２分割＞

今回は、新しく見出した香り式分割における母等式を紹介したい。

本シリーズではゼータの分割やゼータ香り式の分割を行っているわけであるが、それらで一番重要なものは母等式である。簡単に分身たちを生み出せる母等式を基礎に採用したいのだが、ゼータの分割では、その最善形に到達するのに３年半もかかった。気づけばたいしたことはないのだが、なかなか気づかないのである。

香り式（ゼータの香りの漂う公式）の分割は、はじめたばかりである。前回、香り式の母等式として“弱公式”を採用すると宣言した。しかしその公式でも香り式の分身を出すのはなかなかたいへんである。弱公式を眺めているうちに「この式は二つの式が絡まってできている」ような気がしてきた。弱公式は２個の独立の式に分離できるのではないか？と。検討した結果、二式に分けることに成功した。そしてそれらは既出のフーリエ級数の式であるとわかった。岩波数学公式Ⅱ(森口・宇田川・一松著)p.247

これまでの経緯から、そのフーリエ級数は香り式の分身たちを生み出す母等式であると認識できているので、それらを“ゼータ香り式分割母等式”と名付け、基本公式として採用する。今後はそれらを使って香り式の分割を行っていくことにしたい。既出とはいえ優雅なフーリエ級数を自身で出せたことは大変うれしく、ついに最善形に到達したという想いである。ただし、これが全てだとも思わないが・・

さて、見出したそれらの母等式を示すと以下となる。なお、以降での ch, sh, th は、それぞれ双曲線関数 cosh, sinh, tanh のことである。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

ゼータ香り式分割母等式Ⅰ

$$\sin x/(1^2+a^2)+3\sin 3x/(3^2+a^2)+5\sin 5x/(5^2+a^2)+\cdots=(\pi/4)\mathrm{ch}(a(\pi/2-x))/\mathrm{ch}(a\pi/2)$$

$(0<x<\pi)$

ゼータ香り式分割母等式Ⅱ

$$\cos x/(1^2+a^2)+\cos 3x/(3^2+a^2)+\cos 5x/(5^2+a^2)+\cdots=(\pi/(4a))\mathrm{sh}(a(\pi/2-x))/\mathrm{ch}(a\pi/2)$$

$(0\leqq x\leqq\pi)$

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

これが香り式の分身たちを生み出す母等式である。きれいで簡明な姿をしている。

さて、前回見た弱公式は次のものであった。

弱[ゼータ香り]公式

$$a\{\cos x/(1^2+a^2)+\cos 3x/(3^2+a^2)+\cos 5x/(5^2+a^2)+\cdots\}$$
$$+\{\sin x/(1^2+a^2)+3\sin 3x/(3^2+a^2)+5\sin 5x/(5^2+a^2)+\cdots\}=(\pi/4)\cdot e^{a(\pi/2-x)}/\mathrm{ch}(a\pi/2)$$

少なくとも $0<x<\pi$ で成り立つ。

この弱公式から、上記の二つの母等式は次のようにして導出した。計算は自明なので概要だけ数行で記す。

＜弱公式から母等式Ⅰ、Ⅱの導出の概要＞

弱公式に対し、まず a＝i・k（i は虚数単位）とすると、二つの式に分解できる。さらに、その二式に対し、k＝i・a（i は虚数単位）として式変形を行っていくと母等式Ⅰ、Ⅱ（フーリエ級数）が得られる。
以上。

このような方法で導いた。一種のマジック（トリック？）のような感じであるが・・

ここで「ゼータの分割」と「ゼータ香り式の分割」を分身たちの出現の仕方という点で比較すると、ゼータ分割の方が単純な分割になっている。一方、香り式の分割は、「一つ前の段階の結果も一緒に利用する過程」と「連立方程式を解く過程」という二つの過程が加わっていて、装飾が加わった優雅な分割とでもいうようなものになっている。

まとめると、次のような感じである。
●ゼータの分割　⇒単純な分割
●香り式の分割　⇒装飾が加わった優雅な分割

それでは、母等式Ⅱを使って Z(2)類似香り式の２分割（２分身）を出しておこう。つまり次を出したい。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

＜Z(2)類似香り式の２分割＞

$1/(1^2+a^2)+1/(3^2+a^2)+1/(5^2+a^2)+1/(7^2+a^2)+1/(9^2+a^2)+1/(11^2+a^2)+\cdots=(\pi/(4a))\,\mathrm{th}(a\pi/2)$ -----①

a は任意の実数。

この Z(2)類似ゼータ香り式①の 2 分身は、次の②、③となる。

$1/(1^2+a^2)+1/(7^2+a^2)+1/(9^2+a^2)+1/(15^2+a^2)+\cdots=(\pi/(8a))\{\mathrm{th}(a\pi/2)+\sqrt{2}\cdot\mathrm{sh}(a\pi/4)/\mathrm{ch}(a\pi/2)\}$ ---②

$1/(3^2+a^2)+1/(5^2+a^2)+1/(11^2+a^2)+1/(13^2+a^2)+\cdots=(\pi/(8a))\{\mathrm{th}(a\pi/2)-\sqrt{2}\cdot\mathrm{sh}(a\pi/4)/\mathrm{ch}(a\pi/2)\}$ --③

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

ここで、Z(2)は、本シリーズで頻出するものだが、$Z(2)=1+1/3^2+1/5^2+1/7^2+\cdots=(3/4)\zeta(2)$ であり、本質的に $\zeta(2)$ と同じものである。

上記２分身②、③の導出の方法は以下の通りである。

＜導出の方法＞

ゼータ香り式分割母等式Ⅱ

$\cos x/(1^2+a^2)+\cos 3x/(3^2+a^2)+\cos 5x/(5^2+a^2)+\cdots=(\pi/(4a))\,\mathrm{sh}(a(\pi/2-x))/\mathrm{ch}(a\pi/2)$

$(0\leqq x\leqq\pi)$

この母等式Ⅱの x に 0 を代入すると、次となる（π を代入しても同じ）。

$1/(1^2+a^2)+1/(3^2+a^2)+1/(5^2+a^2)+1/(7^2+a^2)+1/(9^2+a^2)+1/(11^2+a^2)+\cdots=(\pi/(4a))\,\mathrm{th}(a\pi/2)$ ---④

母等式Ⅱのｘに $\pi/4$ を代入すると、次となる（$3\pi/4$ を代入しても同じ）。

$$(1/\sqrt{2})\{1/(1^2+a^2)-1/(3^2+a^2)-1/(5^2+a^2)+1/(7^2+a^2)+1/(9^2+a^2)-1/(11^2+a^2)-1/(13^2+a^2)+1/(15^2+a^2)+\cdots\}$$
$$=(\pi/(4a))\mathrm{sh}(a\pi/4)/\mathrm{ch}(a\pi/2) \quad ----⑤$$

さて、ここでA1とA2を次のものとしよう。

$$A1=1/(1^2+a^2)+1/(7^2+a^2)+1/(9^2+a^2)+1/(15^2+a^2)+1/(17^2+a^2)+1/(23^2+a^2)+\cdots$$
$$A2=1/(3^2+a^2)+1/(5^2+a^2)+1/(11^2+a^2)+1/(13^2+a^2)+1/(19^2+a^2)+1/(21^2+a^2)+\cdots$$

④、⑤をA1,A2を用いて書き直すと、次となる。

$$A1+A2=(\pi/(4a))\mathrm{th}(a\pi/2)$$
$$(1/\sqrt{2})(A1-A2)=(\pi/(4a))\mathrm{sh}(a\pi/4)/\mathrm{ch}(a\pi/2)$$

これをA1, A2の連立方程式として解いて次を得る。

$$A1=(\pi/(8a))\{\mathrm{th}(a\pi/2)+\sqrt{2}\cdot\mathrm{sh}(a\pi/4)/\mathrm{ch}(a\pi/2)\}$$
$$A2=(\pi/(8a))\{\mathrm{th}(a\pi/2)-\sqrt{2}\cdot\mathrm{sh}(a\pi/4)/\mathrm{ch}(a\pi/2)\}$$

上式は次式と同じであり、これは①の２分身②、③そのものである。

$$1/(1^2+a^2)+1/(7^2+a^2)+1/(9^2+a^2)+1/(15^2+a^2)+\cdots=(\pi/(8a))\{\mathrm{th}(a\pi/2)+\sqrt{2}\cdot\mathrm{sh}(a\pi/4)/\mathrm{ch}(a\pi/2)\}$$
$$1/(3^2+a^2)+1/(5^2+a^2)+1/(11^2+a^2)+1/(13^2+a^2)+\cdots=(\pi/(8a))\{\mathrm{th}(a\pi/2)-\sqrt{2}\cdot\mathrm{sh}(a\pi/4)/\mathrm{ch}(a\pi/2)\}$$

以上。

このようにして、Z(2)類似香り式 $=1/(1^2+a^2)+1/(3^2+a^2)+1/(5^2+a^2)+1/(7^2+a^2)+\cdots$ の２分身が得られた。この＜導出の方法＞を眺めることで、“装飾が加わった優雅な分割”の意味がわかっていただけるのではなかろうか。

式を再掲しよう。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

＜Z(2)類似香り式＞

$$1/(1^2+a^2)+1/(3^2+a^2)+1/(5^2+a^2)+1/(7^2+a^2)+1/(9^2+a^2)+1/(11^2+a^2)+\cdots=(\pi/(4a))\mathrm{th}(a\pi/2) \quad -----①$$

ａは任意の実数。

＜Z(2)類似香り式の２分身＞

$$1/(1^2+a^2)+1/(7^2+a^2)+1/(9^2+a^2)+1/(15^2+a^2)+\cdots=(\pi/(8a))\{\mathrm{th}(a\pi/2)+\sqrt{2}\cdot\mathrm{sh}(a\pi/4)/\mathrm{ch}(a\pi/2)\} \quad --②$$
$$1/(3^2+a^2)+1/(5^2+a^2)+1/(11^2+a^2)+1/(13^2+a^2)+\cdots=(\pi/(8a))\{\mathrm{th}(a\pi/2)-\sqrt{2}\cdot\mathrm{sh}(a\pi/4)/\mathrm{ch}(a\pi/2)\} \quad --③$$

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

これらは何度眺めてもよいものである。②と③を足せば①になるというそのふしぎを味わっていただきたい。後者は（その１３）で見たZ(2)２分割の完全なる類似になっていることにも注目したい。

なお、a->0とすると、①は $Z(2)=1+1/3^2+1/5^2+1/7^2+\cdots=(3/4)\zeta(2)=\pi^2/8$ となり、また②、③はZ(2)の２分身に一致する。②の場合、$1+1/7^2+1/9^2+1/15^2+\cdots=(\pi/8)^2(4+2\sqrt{2})$ となる。

最後に、テーマの整理と備忘録の意味から、構想や予想、妄想、つぶやきを述べておく。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

● 弱公式が二式から成っているのでは？と思いついたのは、ゼータ分割の経験があったからである。カンのようなものからきた。弱公式を眺めているうちに、この式は二糸が絡まりあうように二式が絡まっている！と感じ、二式に分解するには上方で見た方法しかないと思い、計算を実行した次第である。

　問題意識もなく母等式Ⅰ/Ⅱ(フーリエ級数)を眺めてもそれは単なる石ころにすぎないが、「分身を生み出す」という意識の眼で見れば、それは宝玉となる。

● 弱公式の場合と比べ、母等式Ⅰ/Ⅱを使うと計算時間がかなり短縮される。１／３くらいになる気がする。Z(2)類似香り式２分身の場合、弱公式で手計算で２時間ほどかかるところ、母等式Ⅱで 40 分程度になった感じである。４分割以上ではもっと時間がかかるが、気分は楽である。

● よく見ると、＜導出の方法＞の⑤は、実２次体 Q($\sqrt{2}$)ゼータ L1(2)の類似となっていることに気づく。⑤で $a\to 0$ とすると下の方の式に一致する。これはこれで興味深いが、いまは香り式の分割という視点でやっているので、とりたてて重視はしない。

　なお、下の方の式の値“$\pi^2\cdot\sqrt{2}/16$”は、テイラーシステムを使えば初等的に得ることができる。しかし見方を変えれば、L1(2)の値は、⑤で $a\to 0$ としても得られるとも言え、やはり面白い。なるほど・・

$$(1/\sqrt{2})\{1/(1^2+a^2) -1/(3^2+a^2) -1/(5^2+a^2) +1/(7^2+a^2) +1/(9^2+a^2) -1/(11^2+a^2) -1/(13^2+a^2) +1/(15^2+a^2) +\cdots\}$$
$$=(\pi/(4a))\,\mathrm{sh}(a\pi/4)/\mathrm{ch}(a\pi/2) \quad \text{-----⑤}$$

$$L1(2)=1 -1/3^2 -1/5^2 +1/7^2 +1/9^2 -1/11^2 -1/13^2 +1/15^2 +\cdots=\pi^2\cdot\sqrt{2}/16$$

● 数学は、基礎的な領域でもまだまだ未知の大海がひろがっているような気がする。

今回、フーリエ級数

$$\sin x/1 +\sin 3x/3 +\sin 5x/5 +\cdots=\pi/4 \quad (0<x<\pi) \quad \text{---⑥}$$

に対し $\int e^{ax}\sim dx$ の作用素で積分し、強公式を出しそれから弱公式を得て、そこから二つのフーリエ級数が得られ、それが香り式分割の母等式である！とわかった。

　上記⑥のようなちゃちなフーリエ級数に着目する数学者などいないであろうが、このようなものから新しいことが飛び出してくる。見落とされている宝石はたくさんあるのではないか。足元は見えづらいので。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

2022.3.5 杉岡幹生

＜参考文献＞

・「数学公式Ⅱ」（森口・宇田川・一松 著、岩波書店）