＜ L(1)類似香り式の２分割 、強公式と弱公式＞

前回、Z(2)類似（つまりζ(2)類似）香り式の２分割を行ったが、L(1)類似香り式の２分割（２分身）も得ることができたので、今回はそれを紹介したい。

下記①のL(1)類似香り式自体は、１１年ほど前に下記ページの［π/2 代入&3π/2 代入］の所で出していた。
http://www5b.biglobe.ne.jp/~sugi_m/page210.htm
$1/(1^2+a^2)\ -3/(3^2+a^2)\ +5/(5^2+a^2)\ -7/(7^2+a^2)+\ 9/(9^2+a^2)\ -11/(11^2+a^2)\ +\cdot\cdot\ =(\pi/4)/\cosh(a\pi/2)$ ----①

右辺は当時と表現は変えたが、同じことである。当時は、やみくもにこのような式をたくさん出していた。“L(1)類似香り式”の名称の意味はわかるだろう。a->0 にすると、L(1)＝1-1/3+1/5-1/7+・・＝π/4 になる。

ゼータの香りの漂う公式の分割というのは、まだはじめたばかりでわからない点も多いのだが、計算を進めるうちに、だんだんと整理できてきた。研究の結果、前回紹介した＜導出の方法＞の式をもう少し簡略化することにも成功した。前回（その２３６）の式（方法）を強ゼータ香り公式、そしてそれを簡単化した式を弱ゼータ香り公式として、それらも以下で示す。今後、“強公式”、“弱公式”と略すことも多い。

強公式は弱公式を含むものだが、ほとんどの場合、簡明な弱公式で十分であり、今後は弱の方を主に使っていく。なお、ゼータの香りの漂う公式も、“ゼータ香り式”や“香り式”と短く呼んでいく。

では早速、L(1)類似香り式の２分割を示そう。なお、th, sh, ch は、それぞれ双曲線関数の tanh, sinh, cosh のことである。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

＜L(1)類似香り式の２分割＞

$1/(1^2+a^2)\ -3/(3^2+a^2)\ +5/(5^2+a^2)\ -7/(7^2+a^2)\ +9/(9^2+a^2)\ -11/(11^2+a^2)\ +\cdot\cdot\ =(\pi/4)/\mathrm{ch}(a\pi/2)$ ----①

a は任意の実数。

このL(1)類似香り式の 2 分割は、次の②、③となる。

$B1=1/(1^2+a^2)\ -7/(7^2+a^2)\ +9/(9^2+a^2)\ -15/(15^2+a^2)\ +17/(17^2+a^2)\ -23/(23^2+a^2)\ +\cdot\cdot$
$=(\pi/8)\{1+\sqrt{2}\cdot\mathrm{ch}(a\pi/4)\}/\mathrm{ch}(a\pi/2)$ ----②

$B2=3/(3^2+a^2)\ -5/(5^2+a^2)\ +11/(11^2+a^2)\ -13/(13^2+a^2)\ +19/(19^2+a^2)\ -21/(21^2+a^2)\ +\cdot\cdot$
$=(\pi/8)\{-1+\sqrt{2}\cdot\mathrm{ch}(a\pi/4)\}/\mathrm{ch}(a\pi/2)$ ----③

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

②から③を辺々引き算すると①になることが容易にわかるだろう。B1+(-B2)＝①となるので、B1, -B2 が、L(1)類似香り式の２分身である。

これは、L(1)２分割の完全な類似になっていることもすぐにわかる。L(1)２分割⇒（その１１）

そして面白いことに、a->0 とすると、L(1)の２分割に一致する。
　よって、上記の結果は、ゼータ分割をも包含する一般的なものとなっている。
数値計算も行ったが(a＝0.3,a＝10 で)、OK であった。左辺の級数は右辺値に収束する。

　上記結果の導出の方法を以下に簡単に記す。強公式、弱公式も一緒に出した。
＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

＜導出の方法＞

　フーリエ級数

$$\sin t/1 + \sin 3t/3 + \sin 5t/5 + \sin 7t/7 + \cdots = \pi/4 \quad (0<t<\pi) \qquad \text{----④}$$

　の両辺に e^{at} を掛け、0～x の範囲で積分する。部分積分を２回行うことで、次の公式を得る。

強[ゼータ香り]公式

$$\{(1-e^{ax}\cdot\cos x)/(1^2+a^2) + (1-e^{ax}\cdot\cos 3x)/(3^2+a^2) + (1-e^{ax}\cdot\cos 5x)/(5^2+a^2) + \cdots\}$$
$$+(e^{ax}/a)[\{\sin x/1 + \sin 3x/3 + \sin 5x/5 + \cdots\} - \{\sin x/(1^2+a^2) + 3\sin 3x/(3^2+a^2) + 5\sin 5x/(5^2+a^2) + \cdots\}]$$
$$= (\pi/4a)(e^{ax}-1) \qquad \text{---⑤}$$

少なくとも 0<=x<=π で成り立つ。

　これは x が 0 やπでも成り立っている。よって強公式⑤は（④を参考にして）、少なくとも 0<=x<=πで成り立つ。
　⑤の x にπ/4 と 3π/4 を代入して得られる二式と、次の Z(2)類似香り式

$$1/(1^2+a^2) + 1/(3^2+a^2) + 1/(5^2+a^2) + 1/(7^2+a^2) + \cdots = (\pi/(4a))\,\mathrm{th}(a\pi/2)$$

を組み合わせることで、前回の Z(2)類似香り式２分割が得られ、さらに同時に次の⑥も得られる（途中、下の⑦を利用）。⑥は下記の弱[ゼータ香り]公式を用いても出る（この場合は⑦不要）。

$$1/(1^2+a^2) + 3/(3^2+a^2) - 5/(5^2+a^2) - 7/(7^2+a^2) + 9/(9^2+a^2) + 11/(11^2+a^2) - 13/(13^2+a^2) - 15/(15^2+a^2) + \cdots$$
$$= (\pi\sqrt{2}/4)\cdot\mathrm{ch}(a\pi/4)/\mathrm{ch}(a\pi/2) \qquad \text{---⑥}$$

　なお、これは虚２次体 Q($\sqrt{-2}$)ゼータ $L2(s) = 1 + 1/3^s - 1/5^s - 1/7^s + \cdots$ の s＝1 の次の類似である。

$$1 + 1/3 - 1/5 - 1/7 + 1/9 + 1/11 - 1/13 - 1/15 + \cdots = \pi\sqrt{2}/4 \qquad \text{----⑦}$$

　さて、⑥は、次の B1 と B2 を足し算したものに等しいことに気づく。

$$B1 = 1/(1^2+a^2) - 7/(7^2+a^2) + 9/(9^2+a^2) - 15/(15^2+a^2) + 17/(17^2+a^2) - 23/(23^2+a^2) + \cdots$$
$$B2 = 3/(3^2+a^2) - 5/(5^2+a^2) + 11/(11^2+a^2) - 13/(13^2+a^2) + 19/(19^2+a^2) - 21/(21^2+a^2) + \cdots$$

すなわち、

$$B1 + B2 = (\pi\sqrt{2}/4)\cdot\mathrm{ch}(a\pi/4)/\mathrm{ch}(a\pi/2) \qquad \text{----⑧}$$

となっている。

　ところで、⑤の強公式は、x の範囲を 0<x<πに限定すると、④のフーリエ級数も利用できて、もっと簡単化できる。強公式を上方の Z(2)類似香り式も用いて変形していくと、弱公式に到達する。

弱[ゼータ香り]公式

$a\{\cos x/(1^2+a^2)+\cos 3x/(3^2+a^2)+\cos 5x/(5^2+a^2)+\cdots\}$
$+\{\sin x/(1^2+a^2)+3\sin 3x/(3^2+a^2)+5\sin 5x/(5^2+a^2)+\cdots\}=(\pi/4)\cdot e^{a(\pi/2-x)}/\mathrm{ch}(a\pi/2)$ ---⑨

少なくとも $0<x<\pi$ で成り立つ。

この弱公式の x に $\pi/2$ を代入すると、即座に次を得る。

$1/(1^2+a^2)-3/(3^2+a^2)+5/(5^2+a^2)-7/(7^2+a^2)+9/(9^2+a^2)-11/(11^2+a^2)+13/(13^2+a^2)-15/(15^2+a^2)+\cdots$
$=(\pi/4)/\mathrm{ch}(a\pi/2)$ ---⑩

⑩は、B1,B2 で表現すると、次となる。

$B1-B2=(\pi/4)/\mathrm{ch}(a\pi/2)$ ----⑪

⑧と⑪から、B1 と B2 が得られる。これはＬ(1)類似香り式の２分割②、③そのものである。

$B1=1/(1^2+a^2)-7/(7^2+a^2)+9/(9^2+a^2)-15/(15^2+a^2)+17/(17^2+a^2)-23/(23^2+a^2)+\cdots$
$=(\pi/8)\{1+\sqrt{2}\cdot\mathrm{ch}(a\pi/4)\}/\mathrm{ch}(a\pi/2)$

$B2=3/(3^2+a^2)-5/(5^2+a^2)+11/(11^2+a^2)-13/(13^2+a^2)+19/(19^2+a^2)-21/(21^2+a^2)+\cdots$
$=(\pi/8)\{-1+\sqrt{2}\cdot\mathrm{ch}(a\pi/4)\}/\mathrm{ch}(a\pi/2)$

以上。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

導出の方法は以上である。再び式を眺めよう。

＜L(1)類似香り式＞

$1/(1^2+a^2)-3/(3^2+a^2)+5/(5^2+a^2)-7/(7^2+a^2)+9/(9^2+a^2)-11/(11^2+a^2)+\cdots=(\pi/4)/\mathrm{ch}(a\pi/2)$ ----①

＜L(1)類似香り式の２分身＞

$1/(1^2+a^2)-7/(7^2+a^2)+9/(9^2+a^2)-15/(15^2+a^2)+17/(17^2+a^2)-23/(23^2+a^2)+\cdots$
$=(\pi/8)\{1+\sqrt{2}\cdot\mathrm{ch}(a\pi/4)\}/\mathrm{ch}(a\pi/2)$ ----②

$3/(3^2+a^2)-5/(5^2+a^2)+11/(11^2+a^2)-13/(13^2+a^2)+19/(19^2+a^2)-21/(21^2+a^2)+\cdots$
$=(\pi/8)\{-1+\sqrt{2}\cdot\mathrm{ch}(a\pi/4)\}/\mathrm{ch}(a\pi/2)$ ----③

これらはいくら眺めても飽きない。②から③を引いたら①になる、というその不思議を味わっていただきたい。

最後に、テーマの整理と備忘録の意味から、構想や予想、妄想、つぶやきを述べておく。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

● 弱公式を使えば、強公式の場合より、導出がかなり見通しよく行えるようになる。そうはいっても、計算はかなり大変である。香り式の分割は、ゼータ分割の簡明さとは大違いである。

ただし、計算自体は難しくない。ゼータは対称性の上に生きていて、縦糸のL(1)香り式と横糸のξ(2)香り式でもって美しく織り上げられていく。その織り方は、あまりにも美しい。

● ゼータ分割もまだまだやり残していることが多いが、香り式の分割という洞窟に入り込んでしまった。
ゼータ分割の洞窟よりも、こちらの方がもっと深くて暗い。しかし対称性という光で光っている鉱石が落ちていて、それがあたりを照してくれているので、足を踏み外すことはない気がする。
その対称性は、三角関数から来ている。１次のゼータの話。

● 以前から２次のゼータも分割できるのではないか？と思っている。そう妄想しているだけだが。１次ゼータＬ（χ，ｓ）の分割の類似が、２次ゼータ（楕円曲線ゼータ）でも成り立っているような気がする。その場合の対称性は、楕円関数やモジュラー関数からくることになるだろう。

● 上が成り立つならば、その２次ゼータの香り式というのもあるのだろうか。
３次、４次・・の高次ゼータは？　人類はまだそんなところまで到達していない。

● ４年前に（その４）で出した、この種の香り式の分割も可能なのか。
****
A＝1/(1^8+1) + 1/(3^8+ 1) + 1/(5^8+1) + 1/(7^8+1) + ・・
B＝1/(1^8+1) + 3^4/(3^8+1) + 5^4/(5^8+1) + 7^4/(7^8+1)+・・
この正体は、次となります。

A＝K[α{(sh2α−s2α)−2sβshβ(cαshα+sαchα)+2cβchβ(cαshα−sαchα)}+β{(sh2β−s2β)−2sαshα(cβshβ+sβchβ)+2cαchα(cβshβ−sβchβ)}]

B＝K[β{(sh2α−s2α)−2sβshβ(cαshα+sαchα)+2cβchβ(cαshα−sαchα)}−α{(sh2β−s2β)−2sαshα(cβshβ+sβchβ)+2cαchα(cβshβ−sβchβ)}]

ここで、α＝(π/√2)cos(π/8)、β＝(π/√2)sin(π/8)です。
sα、cα、shα、chαは、それぞれsinα、cosα、sinhα、coshαを表します。長くなるので略記しました。sinh、coshは双曲線関数です。またKは、K＝1/[8*{(cβchα+cαchβ)^2+(sβshα−sαshβ)^2}]です。
****
＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

2022.2.27　杉岡幹生