＜ L(1)分割微分方程式の一般解をシンプル解で再構成 ＞

前回の続き。L(1)分割微分方程式の一般解を、シンプル解で構成し直しておく。

L(1) n 分割の微分方程式

$$(x^2+1)y'' - 2(n-1)xy' + n(n-1)y = 0 \quad \text{-----}[1]$$

(n=・・-3,-2,-1, 0, 1, 2, 3・・)

または

$$(x^2+1)^n \frac{d}{dx}\left\{(x^2+1)^{1-n}\frac{dy}{dx}\right\} = n(1-n)y \quad \text{------}[2]$$

[1]と[2]は、本質的に同じ微分方程式である。

[L(1)分割微分方程式の一般解（シンプル解を基調とした表現）]

・

・

n=-7 の場合　$y=\{c_1(x^7-21x^5+35x^3-7x)+c_2(7x^6-35x^4+21x^2-1)\}/(x^2+1)^7$

n=-6 の場合　$y=\{c_1(x^6-15x^4+15x^2-1)+c_2(6x^5-20x^3+6x)\}/(x^2+1)^6$

n=-5 の場合　$y=\{c_1(x^5-10x^3+5x)+c_2(5x^4-10x^2+1)\}/(x^2+1)^5$

n=-4 の場合　$y=\{c_1(x^4-6x^2+1)+c_2(4x^3-4x)\}/(x^2+1)^4$

n=-3 の場合　$y=\{c_1(x^3-3x)+c_2(3x^2-1)\}/(x^2+1)^3$

n=-2 の場合　$y=\{c_1(x^2-1)+c_2x\}/(x^2+1)^2$

n=-1 の場合　$y=\{c_1x+c_2\}/(x^2+1)$

n=0 の場合　$y=c_1\tan^{-1}(x)+c_2$

n=1 の場合　$y=c_1x+c_2$

n=2 の場合　$y=c_1(x^2-1)+c_2x$

n=3 の場合　$y=c_1(x^3-3x)+c_2(3x^2-1)$

n=4 の場合　$y=c_1(x^4-6x^2+1)+c_2(4x^3-4x)$

n=5 の場合　$y=c_1(x^5-10x^3+5x)+c_2(5x^4-10x^2+1)$

n=6 の場合　$y=c_1(x^6-15x^4+15x^2-1)+c_2(6x^5-20x^3+6x)$

n=7 の場合　$y=c_1(x^7-21x^5+35x^3-7x)+c_2(7x^6-35x^4+21x^2-1)$

・

・

ここで、c_1 と c_2 は任意の定数である。

このようにシンプル解を用いた一般解は、パスカル解を用いた場合より、かなり簡潔なものになった。
なお、n=0 の場合は、パスカル解の場合と同じものを使った。

2022.2.19　杉岡幹生