＜ 新種のＬ(1)分割　--２分身，３分身-- ＞

今回は、Ｌ(1)の新種の２分身、３分身を示す。３分身は２種類ある。これらは本流から外れたところで３年前に見つけていたものである。なお、Ｌ(1)は、次の通り。

$L(1)=1-1/3+1/5-1/7+1/9-1/11+1/13-1/15+\cdots=\pi/4$

以下に結果だけ示す。

■Ｌ(1)２分割

$A1=1+1/9-1/11-1/19+1/21+1/29+\cdots=(\pi/10)/\cos(2\pi/5)$

$A2=1/3+1/7-1/13-1/17+1/23+1/27+\cdots=(\pi/10)/\cos(\pi/5)$

$A1-A2=(4/5)L(1)$ となっている。 A1,−A2 がＬ(1)の新種の２分身である。

上式右辺の 1/cos()の値は右の通り。$1/\cos(2\pi/5)=1+\sqrt{5}$, $1/\cos(\pi/5)=-1+\sqrt{5}$

なお、上記の二式の結果は、Excel の数値検証でも正しい。

■Ｌ(1)３分割

$B1=1+1/17-1/19-1/35+1/37+1/53-\cdots=(\pi/18)/\sin(\pi/18)$

$B2=1/5+1/13-1/23-1/31+1/41+1/49-\cdots=(\pi/18)/\sin(5\pi/18)$

$B3=1/7+1/11-1/25-1/29+1/43+1/47-\cdots=(\pi/18)/\sin(7\pi/18)$

$B1+B2-B3=(4/3)L(1)$ となっている。 B1,B2, −B3 が新種のＬ(1)の３分身である。

上記の三式の結果は、Excel の数値検証でも正しい。

■上とは別のＬ(1)３分割

$C1=1+1/13-1/15-1/27+1/29+1/41-\cdots=(\pi/14)/\sin(\pi/14)$

$C2=1/3+1/11-1/17-1/25+1/31+1/39-\cdots=(\pi/14)/\sin(3\pi/14)$

$C3=1/5+1/9-1/19-1/23+1/33+1/37-\cdots=(\pi/14)/\sin(5\pi/14)$

$C1-C2+C3=(8/7)L(1)$ となっている。 C1,−C2, C3 が新種のＬ(1)の３分身である。

上記の三式の結果は、Excel の数値検証でも正しい。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

このように新種の２分身、３分身が求まった。

２分身は（その２８）のＬ(1)５分割の結果を利用した。３分身では（その３０）を利用した。B1～B3 はＬ(1)９分割を、C1～C3 はＬ(1)７分割を用いた。(注記：当時は５分割、９分割、７分割としたが、今の目で見れば、実質的にはそれぞれ４分割、８分割、６分割である。)

これらは、実対称行列から分割の微分方程式を求めている途上で３年前に偶発的に見出したものである。

ゼータ分割にはまだまだ未知の領域が広がっていることを感じた。しかしその時は主流のテーマを追いかけていたので、「またいつか・・」としておいていかざるを得なかった。

　新種の分割の結果が、ここ４年近くやってきた本流の？分割とは全く異なった分割になっていることに容易に気づく。

　上の結果だけではわかりにくいかもしれない。■L(1) ２分割を見てみよう。

その“A1 -A2 ＝(4/5)L(1)”は、すなわち、“A1 -A2 ＝(1-1/5)L(1)”であり、次のようになっている（赤字に着目）。

A1 -A2＝(1 +1/9 -1/11 -1/19 +1/21 +1/29 + ・・) -(1/3 +1/7 -1/13 -1/17 +1/23 +1/27 + ・・)

＝1 -1/3 -1/7 +1/9 -1/11 +1/13 +1/17 -1/19 +1/21 -1/23 -1/27 +1/29 -・・

＝1 -1/3 +1/5 -1/7 +1/9 -1/11 +1/13 -1/15 +1/17 -1/19 +1/21 -1/23 +1/25 -1/27 +1/29 -・・

-(1/5 -1/15 +1/25-・・)

＝L(1) -1/5L(1)

＝(1 -1/5)L(1)

　このような変形から“A1 -A2 ＝(4/5)L(1)”が得られた。まさに、A1,-A2 はL(1)の２分身となっていることがわかる。

　３分割の“B1 +B2 -B3＝(4/3)L(1)”や“C1 -C2 +C3＝(8/7)L(1)”も同様の変形から得られる。

　右辺を本質的な形にして、三つを並べておこう。

A1 -A2＝(1 -1/5)L(1)

B1 +B2 -B3＝(1+/3)L(1)

C1 -C2 +C3＝(1+1/7)L(1)

　これを眺めると、オイラー積とも関係していそうである。４年近くやってきた本流の分割以外に無数に分割が存在していそうで、気が遠くなる。

　最後に、テーマの整理と備忘録の意味から、構想や予想、妄想、つぶやきを述べておく。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

●新種の分割に関して、L(1)を述べたが、ζ(2)でも同様になっている。おいおい見ていきたい。

●昨日、新種の６分身を見出して喜んでいたら、過去の新種のものが気になって、そちらから出すのが先だと思い、先にそれらを紹介した。

●ゼータ分割の“漁場”は非常に豊かである。釣りの高度の技量を必要としない。釣り竿さえ要らない。タモ網だけで大物がすくえる。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

2022.1.30　杉岡幹生