＜１回微分-新型母等式(最善形)　No.2＞

①の両辺を１回微分した②を使いζ(2)の分割を続ける。今回は８分割を見る。ある理由から前回の４分割も同時に載せた。

$$1/(1-x) -1/(3+x) +1/(5-x) -1/(7+x) +1/(9-x) -1/(11+x) +\cdots =(\pi/4)\tan(\pi(x+1)/4) \quad \text{----①}$$

少なくとも-1< x <1 で成り立つ。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

1 回微分-新型母等式(最善形)

$$1/(1-x)^2 +1/(3+x)^2 +1/(5-x)^2 +1/(7+x)^2 +1/(9-x)^2 +1/(11+x)^2 +\cdots =(\pi/4)^2/\cos^2(\pi(x+1)/4) \quad \text{----②}$$

少なくとも-1< x <1 で成り立つ。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

繰り返しになるが、以下ではζ(2)と本質的に同じ Z(2)の分身として求めていく。Z(s)は次のものであり、本質的にζ(s)に等しい。以下のように変形でき、それはζ(s)そのものである。

$$Z(s)=1 +1/3^s +1/5^s +1/7^s +1/9^s +1/11^s +\cdots \quad \text{----(1)}$$

$$\begin{aligned} Z(s)&=1 +1/3^s +1/5^s +1/7^s +1/9^s +1/11^s +\cdots \\ &=1 +1/2^s +1/3^s +1/4^s +1/5^s +1/6^s +1/7^s +\cdots -(1/2^s +1/4^s +1/6^s +\cdots) \\ &=\zeta(s) - 1/2^s\zeta(s) \\ &=(1-1/2^s)\zeta(s) \quad \text{-----(2)} \end{aligned}$$

ζ(2)はζ(2)＝$\pi^2/6$ であるから、(2)より Z(2)は Z(2)＝$\pi^2/8$ となる。なお、Z(s)は私が独自に用いている記号で、一般的なものではない。

まず前回の４分割を再掲し、その次に８分割を求めよう。８分割は（その１６２）の結果と同じである。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

■Z(2) ４分割

②の x に 3/4, 1/4, -1/4, -3/4 を代入すると、それぞれ以下の B1, B2, B3, B4 が得られる。

$$B1= 1 +1/15^2 +1/17^2 +1/31^2 +1/33^2 +1/47^2 +\cdots =(\pi/16)^2/\cos^2(7\pi/16)$$
$$B2=1/3^2 +1/13^2 +1/19^2 +1/29^2 +1/35^2 +1/45^2 +\cdots =(\pi/16)^2/\cos^2(5\pi/16)$$
$$B3=1/5^2 +1/11^2 +1/21^2 +1/27^2 +1/37^2 +1/43^2 +\cdots =(\pi/16)^2/\cos^2(3\pi/16)$$
$$B4=1/7^2 +1/9^2 +1/23^2 +1/25^2 +1/39^2 +1/41^2 +\cdots =(\pi/16)^2/\cos^2(\pi/16)$$

B1 +B2 +B3 +B4＝Z(2)＝$\pi^2/8$ である。これら B1, B2, B3, B4 が Z(2)の４分身である。

右辺の $1/\cos^2()$ の部分を計算した結果は、以下の通り。

$1/\cos^2(7\pi/16) = 8 + 4\sqrt{2} + 4\sqrt{2+\sqrt{2}} + 2\sqrt{4+2\sqrt{2}}$

$1/\cos^2(5\pi/16) = 8 - 4\sqrt{2} + 4\sqrt{2-\sqrt{2}} - 2\sqrt{4-2\sqrt{2}}$

$1/\cos^2(3\pi/16) = 8 - 4\sqrt{2} - 4\sqrt{2-\sqrt{2}} + 2\sqrt{4-2\sqrt{2}}$

$1/\cos^2(\pi/16) = 8 + 4\sqrt{2} - 4\sqrt{2+\sqrt{2}} - 2\sqrt{4+2\sqrt{2}}$

■Z(2)８分割

②の x に 7/8, 5/8, 3/8, 1/8, −1/8, −3/8, −5/8, −7/8 を代入すると、それぞれ以下の C1〜C8 が得られる。

$C1 = 1 + 1/31^2 + 1/33^2 + 1/63^2 + 1/65^2 + 1/95^2 + \cdots = (\pi/32)^2/\cos^2(15\pi/32)$

$C2 = 1/3^2 + 1/29^2 + 1/35^2 + 1/61^2 + 1/67^2 + 1/93^2 + \cdots = (\pi/32)^2/\cos^2(13\pi/32)$

$C3 = 1/5^2 + 1/27^2 + 1/37^2 + 1/59^2 + 1/69^2 + 1/91^2 + \cdots = (\pi/32)^2/\cos^2(11\pi/32)$

$C4 = 1/7^2 + 1/25^2 + 1/39^2 + 1/57^2 + 1/71^2 + 1/89^2 + \cdots = (\pi/32)^2/\cos^2(9\pi/32)$

$C5 = 1/9^2 + 1/23^2 + 1/41^2 + 1/55^2 + 1/73^2 + 1/87^2 + \cdots = (\pi/32)^2/\cos^2(7\pi/32)$

$C6 = 1/11^2 + 1/21^2 + 1/43^2 + 1/53^2 + 1/75^2 + 1/85^2 + \cdots = (\pi/32)^2/\cos^2(5\pi/32)$

$C7 = 1/13^2 + 1/19^2 + 1/45^2 + 1/51^2 + 1/77^2 + 1/83^2 + \cdots = (\pi/32)^2/\cos^2(3\pi/32)$

$C8 = 1/15^2 + 1/17^2 + 1/47^2 + 1/49^2 + 1/79^2 + 1/81^2 + \cdots = (\pi/32)^2/\cos^2(\pi/32)$

$C1 + C2 + C3 + C4 + C5 + C6 + C7 + C8 = Z(2) = \pi^2/8$ である。これら C1〜C8 が Z(2)の８分身である。

右辺の $1/\{\cos()\}^2$ の部分を計算した結果は、以下の通り。

$1/\cos^2(15\pi/32) = (2+\sqrt{2})\{8 + 4\sqrt{2+\sqrt{2}} + 4\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} + 2\sqrt{2+\sqrt{2}}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\}$

$1/\cos^2(13\pi/32) = (2-\sqrt{2})\{8 + 4\sqrt{2-\sqrt{2}} + 4\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2}}} + 2\sqrt{2-\sqrt{2}}\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2}}}\}$

$1/\cos^2(11\pi/32) = (2-\sqrt{2})\{8 - 4\sqrt{2-\sqrt{2}} + 4\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{2}}} - 2\sqrt{2-\sqrt{2}}\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{2}}}\}$

$1/\cos^2(9\pi/32) = (2+\sqrt{2})\{8 - 4\sqrt{2+\sqrt{2}} + 4\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}} - 2\sqrt{2+\sqrt{2}}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}\}$

$1/\cos^2(7\pi/32) = (2+\sqrt{2})\{8 - 4\sqrt{2+\sqrt{2}} - 4\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}} + 2\sqrt{2+\sqrt{2}}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}\}$

$1/\cos^2(5\pi/32) = (2-\sqrt{2})\{8 - 4\sqrt{2-\sqrt{2}} - 4\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{2}}} + 2\sqrt{2-\sqrt{2}}\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{2}}}\}$

$1/\cos^2(3\pi/32) = (2-\sqrt{2})\{8 + 4\sqrt{2-\sqrt{2}} - 4\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2}}} - 2\sqrt{2-\sqrt{2}}\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2}}}\}$

$1/\cos^2(\pi/32) = (2+\sqrt{2})\{8 + 4\sqrt{2+\sqrt{2}} - 4\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} - 2\sqrt{2+\sqrt{2}}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\}$

以上。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

このようにして、Z(2)すなわちζ(2)の４分身、８分身が求まった。

さて、４分割と８分割において成り立つきれいな関係に注目したい。

下記の美しい関係が成立している。その成立を、上方から抜き出した***の式を使って確認していただきたい。

C1 +C8＝B1
C2 +C7＝B2
C3 +C6＝B3
C4 +C5＝B4

****

$C1 = 1 + 1/31^2 + 1/33^2 + 1/63^2 + 1/65^2 + 1/95^2 + \cdots = (\pi/32)^2/\cos^2(15\pi/32)$

$C2 = 1/3^2 + 1/29^2 + 1/35^2 + 1/61^2 + 1/67^2 + 1/93^2 + \cdots = (\pi/32)^2/\cos^2(13\pi/32)$

$C3 = 1/5^2 + 1/27^2 + 1/37^2 + 1/59^2 + 1/69^2 + 1/91^2 + \cdots = (\pi/32)^2/\cos^2(11\pi/32)$

$C4 = 1/7^2 + 1/25^2 + 1/39^2 + 1/57^2 + 1/71^2 + 1/89^2 + \cdots = (\pi/32)^2/\cos^2(9\pi/32)$

$C5 = 1/9^2 + 1/23^2 + 1/41^2 + 1/55^2 + 1/73^2 + 1/87^2 + \cdots = (\pi/32)^2/\cos^2(7\pi/32)$

$C6 = 1/11^2 + 1/21^2 + 1/43^2 + 1/53^2 + 1/75^2 + 1/85^2 + \cdots = (\pi/32)^2/\cos^2(5\pi/32)$

$C7 = 1/13^2 + 1/19^2 + 1/45^2 + 1/51^2 + 1/77^2 + 1/83^2 + \cdots = (\pi/32)^2/\cos^2(3\pi/32)$

$C8 = 1/15^2 + 1/17^2 + 1/47^2 + 1/49^2 + 1/79^2 + 1/81^2 + \cdots = (\pi/32)^2/\cos^2(\pi/32)$

$B1 = 1 + 1/15^2 + 1/17^2 + 1/31^2 + 1/33^2 + 1/47^2 + \cdots = (\pi/16)^2/\cos^2(7\pi/16)$

$B2 = 1/3^2 + 1/13^2 + 1/19^2 + 1/29^2 + 1/35^2 + 1/45^2 + \cdots = (\pi/16)^2/\cos^2(5\pi/16)$

$B3 = 1/5^2 + 1/11^2 + 1/21^2 + 1/27^2 + 1/37^2 + 1/43^2 + \cdots = (\pi/16)^2/\cos^2(3\pi/16)$

$B4 = 1/7^2 + 1/9^2 + 1/23^2 + 1/25^2 + 1/39^2 + 1/41^2 + \cdots = (\pi/16)^2/\cos^2(\pi/16)$

****

このようにζ(2)は次々と分身に分かれていく。分身たちの無限フラクタル構造の上に成り立っている。

このフラクタル構造を鑑賞したいがために、前回の４分割を再度持ち出したわけだが、これが冒頭に述べたある理由である。

最後に、テーマの整理と備忘録の意味から、構想や予想、妄想、つぶやきを述べておく。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

● Z(2)すなわちζ(2)の２分割⇒４分割⇒８分割⇒１６分割⇒・・・の分身たちの値は、すべて作図可能数、つまり定規とコンパスで作図できる数となる。作図可能数は数と√のみで表現でき、$^3\sqrt{}$とか$^7\sqrt{}$とかそんなものは含まれない。それは２次方程式を解く形になるからそうなる（２次方程式の解の公式には√しか出てこない)。作図可能数に関しては（その１７１）でもまとめた。そこではL(1)の分割についてまとめているが、ζ(2)でも同じ結論になる。

●（その１７０）再掲。(少し書き換えた)
「正ｎ角形が定規とコンパスで作図できること」と、「α＝2π/nとした場合、点(cosα、sinα)が定規とコンパスで作図できる」ことは同じであることがわかっている。　　　--------［Ａ］
ここで、正ｎ角形のｎとα＝2π/nのｎが同じであることに注目したい。

正ｎ角形が作図可能であるためには、ｎは次の[Ｂ1]か[Ｂ2]のどちらかの条件を満たす数であることが必要である。

$n = 2^k$（k は任意の自然数）　----[Ｂ１]

$n = 2^k \times p \times q \times \cdots \times s$　（k は任意の自然数。p，q，・・，s は異なるフェルマー素数。）　----[Ｂ２]

条件[Ｂ２]はガウス(1777～1855)が予想し、1836 年にヴァンツェル(1814～1848)が証明した。自然数は 0 を含む。ガウスとヴァンツェルは同時代を生きている。日本では江戸時代後期に当たる。ヴァンツェルはガロア(1811～1832)とも時代が重なっていて、若くして亡くなっているのも似ている。

条件[Ｂ２]のフェルマー素数とは次のものである。

フェルマー素数は右の形で表現できる素数：$2^{2^m}+1$　（m は 0 を含む自然数）　----[Ｃ]

フェルマー(1607～1665)は「$2^{2^m}+1$」という形の数を研究し、これらはすべて素数になる！と予想したが、その予想はオイラーによって反例が示され、間違いと分かった。たしかに、$3=2^{2^0}+1$、$5=2^{2^1}+1$、$17=2^{2^2}+1$、$257=2^{2^3}+1$、$65537=2^{2^4}+1$ はすべて素数であり、そう予想したのも頷ける。しかし、じつは[Ｃ]の形の数で素数（フェルマー素数）になるのは、3,5,17,257,65537 の五つしか知られていない。

ともかく正ｎ角形が定規とコンパスで作図可能であるためには、上記の条件[Ｂ１]か[Ｂ２]を満たすｎである必要がある。その条件を満たすｎを小さい方から順番に並べると、次となる。

n＝3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17, 20, 24, 30, 32, 40, 48, 60, 64, ・・・

これらのｎ以外では、正ｎ角形を定規とコンパスで作図できない。それは$\alpha=2\pi/n$ とした場合に点$(\cos\alpha$、$\sin\alpha)$が定規とコンパスで作図できないことを意味する。

17 を赤字にしたのには意味がある。ギリシャから 2000 年もの間、

n＝3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 20, 24, 30, 32, 40, 48, 60, 64, ・・

のｎで正ｎ角形が作図可能であると知られていたが、１９歳の青年ガウスが n＝17 で、つまり正十七角形が作図可能であることを発見し、数学界に衝撃を与えた（1796 年 3 月）。抜けていた穴（n＝17）をガウスが埋めた。ガウスはその発見に興奮し、自分の墓石に正 17 角形を刻んでほしいと求めた。

●よって、$\zeta(2)$の分身も、$L(1)$の分身も、無数にある全てのものが作図可能数になるわけではない。例えば、８分身が作図可能数となるのは、$(\pi/32)^2/\cos^2(k\pi/32)$が作図可能数の cos()から成るからである。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

2022.1.23　杉岡幹生

参考文献

・「マスペディア 1000」（リチャード・エルウィス著、宮本寿代訳、ディスカヴァー・トゥエンティワン）

・「近世数学史談」（高木貞治著、共立出版）