＜ 新型母等式(最善形)　ゼータの香りの漂う公式　No.2 ＞

（その２２９）の続きである。新型母等式(最善形)を用いて、今回は、L(1)の６分割、８分割を求めよう。そして、L(1)類-完全対称乗算等式への分身たちの美しい埋め込みを鑑賞したい。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

新型母等式(最善形)

1/(1−x) −1/(3+x) +1/(5−x) −1/(7+x) +1/(9−x) −1/(11+x) +・・ ＝(π/4)tan(π(x+1)/4)　----①

少なくとも-1< x <1 で成り立つ。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

では、L(1)の６分割、８分割を求めよう。結果的には、８分割は（その１１）、６分割は（その２１）と同じになる。

ここで、L(1)は、L(1)＝1 −1/3 +1/5 −1/7 +1/9 −1/11 +・・である。

■L(1) ６分割

①の x に 5/6, 3/6, 1/6, −1/6, −3/6, −5/6 を代入すると、それぞれ以下の A1, A2, A3, A4, A5, A6 が得られる。

A1＝ 1 −1/23 +1/25 −1/47 +1/49 −1/71 + ・・ ＝(π/24)tan(11π/24)
A2＝1/3 −1/21 +1/27 −1/45 +1/51 −1/69 + ・・＝(π/24)tan(9π/24)
A3＝1/5 −1/19 +1/29 −1/43 +1/53 −1/67 + ・・＝(π/24)tan(7π/24)
A4＝1/7 −1/17 +1/31 −1/41 +1/55 −1/65 +・・ ＝(π/24)tan(5π/24)
A5＝1/9 −1/15 +1/33 −1/39 +1/57 −1/63 +・・ ＝(π/24)tan(3π/24)
A6＝1/11 −1/13 +1/35 −1/37 +1/59 −1/61 +・・＝(π/24)tan(π/24)

A1 −A2 +A3 −A4 +A5 −A6＝L(1)となっている。 A1, −A2, A3, −A4, A5, −A6 が L(1)の６分身である。

■L(1) ８分割

①の x に 7/8, 5/8, 3/8, 1/8, −1/8, −3/8, −5/8, −7/8 を代入すると、それぞれ以下の B1, B2, B3, B4, B5, B6, B7, B8 が得られる。

B1＝1 −1/31 +1/33 −1/63 +1/65 −1/95 +1/97 −1/127 + ・・ ＝(π/32)tan(15π/32)
B2＝1/3 −1/29 +1/35 −1/61 +1/67 −1/93 +1/99 −1/125 +・・ ＝(π/32)tan(13π/32)
B3＝1/5 −1/27 +1/37 −1/59 +1/69 −1/91 +1/101 −1/123 +・・＝(π/32)tan(11π/32)
B4＝1/7 −1/25 +1/39 −1/57 +1/71 −1/89 +1/103 −1/121 +・・＝(π/32)tan(9π/32)
B5＝1/9 −1/23 +1/41 −1/55 +1/73 −1/87 +1/105 −1/119 +・・＝(π/32)tan(7π/32)
B6＝1/11 −1/21 +1/43 −1/53 +1/75 −1/85 +1/107 −1/117 +・・＝(π/32)tan(5π/32)
B7＝1/13 −1/19 +1/45 −1/51 +1/77 −1/83 +1/109 −1/115 +・・＝(π/32)tan(3π/32)
B8＝1/15 −1/17 +1/47 −1/49 +1/79 −1/81 +1/111 −1/113 +・・＝(π/32)tan(π/32)

B1 −B2 +B3 −B4 +B5 −B6 +B7 −B8＝L(1)となっている。 B1,−B2,B3,−B4,B5,−B6,B7,−B8 がＬ(1)の８分身である。
以上。

このようにしてＬ(1)の６分身、８分身が求まった。

次に、これらの分身たちのＬ(1)類-完全対称乗算等式への埋め込みを見ておこう。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

L(1)類-完全対称乗算等式

{1/(1−x) −1/(3+x) +1/(5−x) −1/(7+x) +･･} × {1/(1+x) −1/(3−x) +1/(5+x) −1/(7−x) +･･}＝π²/16 ---②

少なくとも-1< x <1 で成り立つ。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

<u>この②に、①から出る分身たちがきれいに埋め込まれていく</u>。例えば、L(1)６分身では、以下のようになっている。

6^2{1 −1/23 +1/25 −1/47 +1/49 −1/71 +･･} × {1/11 −1/13 +1/35 −1/37 +1/59 −1/61 +･･}＝π²/16
6^2{1/3 −1/21 +1/27 −1/45 +1/51 −1/69 +･･} × {1/9 −1/15 +1/33 −1/39 +1/57 −1/63 +･･}＝π²/16
6^2{1/5 −1/19 +1/29 −1/43 +1/53 −1/67 +･･} × {1/7 −1/17 +1/31 −1/41 +1/55 −1/65 +･･}＝π²/16

まったく美しい姿をしている。どこが美しいのか。上式を模式的に示した下記を見れば、その理由がわかる。

6^2{①左辺の x に 5/6 代入} × {①左辺の x に−5/6 代入}＝π²/16
6^2{①左辺の x に 3/6 代入} × {①左辺の x に−3/6 代入}＝π²/16
6^2{①左辺の x に 1/6 代入} × {①左辺の x に−1/6 代入}＝π²/16

上記を分身 A1～A6 で表すと、次のようになっている。

6^2{A1} × {A6}＝π²/16
6^2{A2} × {A5}＝π²/16
6^2{A3} × {A4}＝π²/16

このように掛け算でペアとなる分身は、<u>絶対値が同じで符号だけ違う(①左辺への)代入値のものになっている</u>のである！

以下の通り、８分身も同様になっている。

8^2{1 −1/31 +1/33 −1/63 +1/65 −1/95 +･･} × {1/15 −1/17 +1/47 −1/49 +1/79 −1/81 +･･}＝π²/16
8^2{1/3 −1/29 +1/35 −1/61 +1/67 −1/93 +･･} × {1/13 −1/19 +1/45 −1/51 +1/77 −1/83 +･･}＝π²/16
8^2{1/5 −1/27 +1/37 −1/59 +1/69 −1/91 +･･} × {1/11 −1/21 +1/43 −1/53 +1/75 −1/85 +･･}＝π²/16
8^2{1/7 −1/25 +1/39 −1/57 +1/71 −1/89 +･･} × {1/9 −1/23 +1/41 −1/55 +1/73 −1/87 +･･}＝π²/16

つまり、上は次のようになっている。

8^2{①左辺の x に 7/8 代入}×{①左辺の x に−7/8 代入}＝$\pi^2/16$
8^2{①左辺の x に 5/8 代入}×{①左辺の x に−5/8 代入}＝$\pi^2/16$
8^2{①左辺の x に 3/8 代入}×{①左辺の x に−3/8 代入}＝$\pi^2/16$
8^2{①左辺の x に 1/8 代入}×{①左辺の x に−1/8 代入}＝$\pi^2/16$

上記を分身 B1〜B8 で表すと、次のようになっている。

8^2{B1}×{B8}＝$\pi^2/16$
8^2{B2}×{B7}＝$\pi^2/16$
8^2{B3}×{B6}＝$\pi^2/16$
8^2{B4}×{B5}＝$\pi^2/16$

きれいな対称性が出ている。分身たちが織りなす妙はあまりにも美しい。

最後に、テーマの整理と備忘録の意味から、構想や予想、妄想、つぶやきを述べておく。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

●①の x に 2/3,1/3,-1/3,-2/3 を代入すると、虚２次体 Q(√−3)ゼータが出た。
（導手 N＝3。ディリクレ指標χ(a)が１の時は、a≡1 mod 3 の場合。χ(a)が−1 の時は、a≡2 mod 3 の場合。）
$L_A(1)$＝1 −1/2 +1/4 −1/5 +1/7 −1/8 +1/10 −1/11 +1/13 −1/14 +1/16 −1/17 +・・

新型母等式(最善形)の場合は、代入値の 3 と Q(√−3)の 3 が一致していてわかりやすい。分身の組み合わせで実２次体 Q(√3)ゼータも出ないだろうか？

● 前回、次の名言を紹介した。

****

名言１．数学の研究と魚釣りの原理

数学の研究は魚を釣るのに似ています。

魚釣りをする場合、釣り竿、釣り糸、釣り針、餌などについての知識や魚の習性や居場所などの知識が必要です。しかし、これらについて知識を得るために、図書館に日参して勉強することも必要かもしれませんが、適当に勉強を切り上げて海や川へ出かけて行って実際に釣りをしなければ、いつまで経っても魚は釣れません。多くの人は、図書館に魚はいないのに、図書館で魚を釣ろうとしています。

実際、その土地の子供たちは貧弱な釣り竿で立派に魚を釣っています。

****

繰り返しになるが、これは、数学者・岡本清郷(きよさと)氏が雑誌「数学のたのしみ　11 号 」(1999 年刊)の「数学まなびはじめ」というエッセーに書かれたものであって、非常に印象に残っており、折に触れては思い出しているものである。読んだのは２０年ほど前だが、最近読み返して、やはり味わい深いと思った。

さらに別の箇所で面白いことが書かれている。ここは２０年前には見落としていた。

p.8 から引用。

****

大阪大学の助手になった私は１年３ヶ月のブランクを取り戻そうと，数学の本を片っ端から読み漁っていました。私のこの様子を見て松島先生は「人の論文ばかり読んでいると頭が悪くなる。人の論文を読むのは適当に切り上げて、自分で考えなさい」と言われました。・・

****

上を見つけて、こんな面白いことが書いてあったんだ、と思った。「人の論文ばかり読んでいると頭が悪くなる」とはまったく面白い！　松島先生とは、数学者・松島与三氏（大阪大学教授）のことである。

いま思えば、この松島氏の言葉と前回の志村五郎氏の言葉が合わさって、上記の名言ができたのだと思う。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

2022.1.8　杉岡幹生

参考文献

・「数学のたのしみ No.11」（日本評論社，1999 年 2 月発行）