＜ 新型母等式(最善形)　ゼータの香りの漂う公式　No.1＞

（その２０８)、(その２１４)、(その２１５）そして（その２１７）でゼータ関数の分身を生成する新型母等式を調べた。今回その母等式をさらに別の形（最善形）に変形し直したので紹介したい。その形の方がゼータをイメージしやすく、かつ分身を対称的に生み出していくことができ、とても分かり易いことになる。

出てくる結果は本質的に本シリーズでやってきたものと同じであるが、その最善形を使うと大変きれいに、かつ簡単にゼータの分割（分身の生成）を行うことができる。よって上記頁のものを含めて、もう一度やり直していく（書き換えていく)。

このシリーズでは、中心テーマの本流以外にあちこちの支流を行ったり来たりしているが、流れの中心は「ゼータの分割とその母等式の研究」である。

（その２０８）以降で次の母等式を調べた。

$$1/(1-x)-1/(1+x)+1/(3-x)-1/(3+x)+1/(5-x)-1/(5+x)+\cdots=(\pi/2)\tan(\pi x/2)$$

少なくとも $0<x<1$ で成り立つ。

これを $x=t/2+1/2$ と変形し、そして最後に t を x に戻して次の形に到達する。

$$1/(1-x)-1/(3+x)+1/(5-x)-1/(7+x)+1/(9-x)-1/(11+x)+\cdots=(\pi/4)\tan(\pi(x+1)/4) \quad \text{-----①}$$

少なくとも $-1<x<1$ で成り立つ。

これが新型母等式(最善形)である。①左辺はＬ(s)をイメージしやすいし、なによりもＬ(s)の分身を対称的にわかりやすく生み出すことができて、とてもよいのである。

①を起点とすると、以下のようになる。

①はゼータＬ(1)の分身を生成する。
①を１回微分した式は、ζ(2)の分身を生成する。
①を２回微分した式は、L(3)の分身を生成する。
①を３回微分した式は、ζ(4)の分身を生成する。
・
・

このような形で、ゼータ特殊値の分身たちを生み出していく。

①を使ってＬ(s)、ζ(s)のみならず、①を起点に巨大ゼータＬ(χ，ｓ)の２次体ゼータの分身も生み出すこともできるが、それはおいおい見ていくことにする（本シリーズで見てきたものと同等)。

では、新型母等式(最善形)を使ってＬ(1)の分身を求めていこう。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

新型母等式(最善形)

$1/(1-x)-1/(3+x)+1/(5-x)-1/(7+x)+1/(9-x)-1/(11+x)+\cdots=(\pi/4)\tan(\pi(x+1)/4)$　----①

少なくとも$-1<x<1$で成り立つ。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

今回は、L(1)の２分割、４分割を求めよう。

■L(1) ２分割

①の x に 1/2 と-1/2 を代入すると、それぞれ以下の A1,A2 が得られる。

$A1= 1 -1/7 +1/9 -1/15 + 1/17 -1/23 +\cdots =(\pi/8)\tan(3\pi/8)$

$A2=1/3 -1/5 +1/11 -1/13 + 1/19 -1/21 +\cdots=(\pi/8)\tan(\pi/8)$

$A1 -A2=\pi/4=L(1)$である。A1,-A2 が L(1)の２分身である。

tan()の値は右の通り。 $\tan(3\pi/8)=1+\sqrt{2}$,　$\tan(\pi/8)=-1+\sqrt{2}$

■L(1) ４分割

①の x に 3/4,1/4,-1/4,-3/4 を代入すると、それぞれ以下の B1,B2,B3,B4 が得られる。

$B1= 1 -1/15 +1/17 -1/31 +1/33 -1/47 +\cdots =(\pi/16)\tan(7\pi/16)$

$B2=1/3 -1/13 +1/19 -1/29 +1/35 -1/45 +\cdots=(\pi/16)\tan(5\pi/16)$

$B3=1/5 -1/11 +1/21 -1/27 +1/37 -1/43 +\cdots=(\pi/16)\tan(3\pi/16)$

$B4=1/7 -1/9 +1/23 -1/25 +1/39 -1/41 +\cdots =(\pi/16)\tan(\pi/16)$

$B1 -B2 +B3 -B4=\pi/4=L(1)$ である。B1,-B2,B3,-B4 が L(1)の４分身である。

tan()の値は以下の通り。

$\tan(7\pi/16)=1+\sqrt{2}+\sqrt{4+2\sqrt{2}}$、$\tan(5\pi/16)=-1+\sqrt{2}+\sqrt{4-2\sqrt{2}}$

$\tan(3\pi/16)=1-\sqrt{2}+\sqrt{4-2\sqrt{2}}$、$\tan(\pi/16)=-1-\sqrt{2}+\sqrt{4+2\sqrt{2}}$

以上。

このようにして、これまでと同様、２分身、４分身が求まった。

新型母等式(最善形)の分かりやすい点は、分割（分身）の数と代入する分数の分母の数が一致することである。

すなわち、L(1)の２分割を求める際は、分母を 2 とした分数の 1/2 と-1/2 を代入すればよい。また４分割を求める際は、分母を 4 とした分数の 3/4,1/4,-1/4,-3/4 を代入すればよい。

よって６分割を求める際は分母を 6 とした分数の 5/6,3/6,1/6,-1/6,-3/6,-5/6 を代入すればよい！

以下同様となる。このように分割の数と代入する分数の分母の数が一致するので、わかりやすいのである。

そして、さらに①の最善形を重視する理由がもう一つある。それは少し前に見出したふしぎな式L(1)類-完全対称乗算等式との関連である。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

L(1)類-完全対称乗算等式

$$\{1/(1-x)-1/(3+x)+1/(5-x)-1/(7+x)+\cdots\}\times\{1/(1+x)-1/(3-x)+1/(5+x)-1/(7-x)+\cdots\}=\pi^2/16$$

少なくとも$-1<x<1$で成り立つ。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

このL(1)類-完全対称乗算等式にペアで埋め込まれる分身が、例えば４分割ならば$x=3/4$と$x=-3/4$での分身同士、また$x=1/4$と$x=-1/4$の分身同士となる！というきれいなことになるのである。

（その２２１）で出した次を見ていただきたい。

$$4^2\{1/1-1/15+1/17-1/31+\cdots\}\times\{1/7-1/9+1/23-1/25+\cdots\}=\pi^2/16$$

$$4^2\{1/3-1/13+1/19-1/29+\cdots\}\times\{1/5-1/11+1/21-1/27+\cdots\}=\pi^2/16$$

上式の左辺は、先に見たxへの3/4代入と-3/4代入での分身同士(B1とB4)の掛け算、下式は1/4代入と-1/4代入の分身同士(B2とB3)の掛け算となっていることに注目していただきたい。

このように①の新型母等式(最善形)は、美しい対称性でもって分身を出現させる形になっている。

これらの理由から、ゼータの分割における母等式は①を採用したいわけである。

最後に、テーマの整理と備忘録の意味から、構想や予想、妄想、つぶやきを述べておく。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

● 次のゼータの香りの漂う公式から、本シリーズは（４年近く前に）出発した。

$$1/(1^2+a^2)+1/(3^2+a^2)+1/(5^2+a^2)+1/(7^2+a^2)+\cdots=(\pi/(4a))\cdot(e^{a\pi}-1)/(e^{a\pi}+1)$$

この公式が三角関数の次の部分分数展開式と本質的に等しいと気付いてからは、そればかり使ってゼータの分身たちを求めてきた。

$$1/(1^2-x^2)+1/(3^2-x^2)+1/(5^2-x^2)+\cdots=(\pi/(4x))\tan(\pi x/2)$$

しかしその計算はかなり複雑なものになった。数か月前に上式を変形した次式を採用すると、ゼータ分割の計算がもっと簡単にできると気づいた。

$$1/(1-x)-1/(1+x)+1/(3-x)-1/(3+x)+1/(5-x)-1/(5+x)+\cdots=(\pi/2)\tan(\pi x/2)$$

そして、さらに分割（分身）の対称性を表現するには、上式を変形した次の①がよいことが分かった。

$$1/(1-x)-1/(3+x)+1/(5-x)-1/(7+x)+1/(9-x)-1/(11+x)+\cdots=(\pi/4)\tan(\pi(x+1)/4) \quad \text{-----①}$$

このような流れで①にたどり着いたのであった。

● 上の式変形自体は簡単なものである。①に到達するのに４年近くもかっかったのはふしぎといえばふしぎである。しかし「気づく」というのはなかなか難しい。つくづくそう思う。気づくためには、意識（問題意

識）でもってものを観る必要があるが、それがないとダイヤモンドが目の前にあっても気付かない。気づきや発見は、意識と深く結びついている。

● 数学者の故・志村五郎氏は、著書の「記憶の切繪図」で、自分が創った理論に対して「このように書いても、私はすいすいと思うがままに結果を出していたわけではない。そんな事は誰にも出来ない。ああでもない、こうでもないと試行錯誤の連続の後でやっと出来るのである。・・」(p.160)と語っているが、その通りと思う。

その時は最善と思って結果を出しても、後からよく調べると、もっと簡単な道順がじつはあった！というのが数学では頻繁に起こる。道具を改良することもよくあるし、そんなふうに改良に改良を重ねてやっとよい形になる。それは数学以外でも同じかもしれない。

● 1997 年から 2002 年ほどの間に「数学のたのしみ」という美しい雑誌が刊行された。

その 11 号で「数学まなびはじめ」というエッセーを数学者・岡本清郷氏（当時・名城大学）が書いていて、そこに志村五郎氏の名言が紹介されている。

それは深く印象に残っていて、私の好きな言葉なので紹介したい。p.14 から引用。

****

・・・

私が大阪大学の助手の頃、志村先生に「私の若い頃は机の上には本や雑誌などは置かないで、紙と鉛筆のみで研究したものだ」と言われたことがありました。最近になってやっとその意味が分かって来たような気がします。

名言１．数学の研究と魚釣りの原理

数学の研究は魚を釣るのに似ています。

魚釣りをする場合、釣り竿、釣り糸、釣り針、餌などについての知識や魚の習性や居場所などの知識が必要です。しかし、これらについて知識を得るために、図書館に日参して勉強することも必要かもしれませんが、適当に勉強を切り上げて海や川へ出かけて行って実際に釣りをしなければ、いつまで経っても魚は釣れません。多くの人は、図書館に魚はいないのに、図書館で魚を釣ろうとしています。

実際、その土地の子供たちは貧弱な釣り竿で立派に魚を釣っています。

・・・・・・（略）

****

この名言に私は感銘を受けた。いまでもよく思い出すものであり、いつか紹介したいと思っていた。

エッセーを読み返すと、この名言は志村氏が述べたものというより、志村氏が話した内容を岡本氏が名言へと意訳したものかもしれない・・と思い始めた。志村五郎氏の言葉と思いこんでいたのだが。どっちでもよいけれども、素晴らしい言葉と思う。これは数学だけでなく、どんなことにも当てはまる。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

2022.1.4　杉岡幹生

参考文献

・「記憶の切繪図」（志村五郎著、筑摩書房）

・「数学のたのしみ No.11」（日本評論社, 1999 年 2 月発行）