＜ Q(√‾-m)とQ(√‾m)のゼータを同時に作る分割が存在する(予想) 、Q(√‾-7)とQ(√‾7)＞

予想の確認の続きである。前回はQ(√‾-6)とQ(√‾6)で予想が成立していることを見た。

今回は、虚2次体Q(√‾-7)と実2次体Q(√‾7)で確認する。すなわち、m＝7での両2次体それぞれのゼータを同時に作ることができる分割が存在することを確認する。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

＜予想(改良版)＞

部分分数展開式①と、それを1回微分した式②のxに、複数のkを用いてk/(2m)を代入することで、虚2次体Q(√‾-m)、実2次体Q(√‾m)のそれぞれのゼータを同時に構成する分割を得ることができる。
ここで、mは平方因子を含まない自然数、kは1≤k<2mを満たす自然数である。

$1/(1^2-x^2)\ \ +1/(3^2-x^2)\ \ +1/(5^2-x^2)\ \ +\cdots =(\pi/(4x))\tan(\pi x/2)$ ----①

$1/(1^2-x^2)^2 +1/(3^2-x^2)^2 +1/(5^2-x^2)^2 +\cdots =(\pi/(4x))^2/\cos^2(\pi x/2) -\{\pi/(8x^3)\}\tan(\pi x/2)$ ---②

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

今回のm＝7の場合を具体的に述べると、次のようになる。

①と②のxに13/14, 11/14, 9/14, 5/14, 3/14, 1/14を代入することで、虚2次体Q(√‾-7)ゼータLp(1)の6分割ができ、同時に実2次体Q(√‾7)ゼータLJ(2)の6分割ができる。

ここでLp(s)は、虚2次体Q(√‾-7)のゼータ関数LP(s)と本質的に同じゼータである。LP(s)、Lp(s)は本シリーズの(その46)でも登場したが、次のようなゼータである。

LP(s)は、ディリクレのL関数L(χ,s)
　L(χ,s)＝χ(1)/1^s＋χ(2)/2^s＋χ(3)/3^s＋χ(4)/4^s＋χ(5)/5^s＋χ(6)/6^s＋χ(7)/7^s +‥
の一種であり、次のものである。
　LP(s)＝1 +1/2^s −1/3^s +1/4^s −1/5^s −1/6^s +/8^s +1/9^s −1/10^s +1/11^s −1/12^s −1/13^s +‥
LP(s)はQ(√‾-7)のゼータ関数で、導手N＝7を持つ。
ディリクレ指標χ(n)は次の通り。n≡1 or 2 or 4 mod 7のときχ(n)＝1, n≡3 or 5 or 6 mod 7のときχ(n)＝−1, その他のときχ(n)＝0となる。

よってs＝1のLP(1)は次となる。

LP(1)＝1 +1/2 −1/3 +1/4 −1/5 −1/6 +1/8 +1/9 −1/10 +1/11 −1/12 −1/13 +･･･

さて、上式は次のように変形できる。
LP(1)＝1 +1/2 −1/3 +1/4 −1/5 −1/6 +1/8 +1/9 −1/10 +1/11 −1/12 −1/13 +･･･
　　＝1 −1/3 −1/5 +1/9 +1/11 −1/13 +1/15 −1/17 −1/19 +1/23 +1/25 −1/27 +･･･

+1/2(1 +1/2 −1/3 +1/4 −1/5 −1/6 +1/8 +1/9 −1/10 +1/11 −1/12 −1/13 +・・・)
＝1 −1/3 −1/5 +1/9 +1/11 −1/13 +/15 −1/17 −1/19 +1/23 +1/25 −1/27 +・・・
+1/2・LP(1)

右辺の2項目を移項して整理すると、次となる。
1 −1/3 −1/5 +1/9 +1/11 −1/13 +/15 −1/17 −1/19 +1/23 +1/25 −1/27 +・・・＝1/2LP(1)

ここで、1 −1/3 −1/5 +1/9 +1/11 −1/13 +/15 −1/17 −1/19 +1/23 +1/25 −1/27 +・・・＝Lp(1)
とおくと、次のようになる。
Lp(1)＝1/2LP(1)

これより、Lp(1)は LP(1)と本質的に同じとわかる。今回の以下の議論では Lp(1)が出てくる。

次に、LJ(2)は実 2 次体 Q(√7)ゼータ LJ(s)の s＝2 のものである。LJ(s)も L(χ,s)の一種で次の形をしたものである。

$LJ(s)＝1 +1/3^s −1/5^s +1/9^s −1/11^s −1/13^s −1/15^s −1/17^s +1/19^s −1/23^s +1/25^s +1/27^s$
$+1/29^s +1/31^s −1/33^s +1/37^s −1/39^s −1/41^s −1/43^s −1/45^s +1/47^s −1/51^s +1/53^s +1/55^s + \cdots$

LJ(s)は、mod 28 に対応したディリクレ指標χ(a)をもち、「a≡1 or 3 or 9 or 19 or 25 or 27 mod 28−−>χ(a)＝1、a≡5 or 11 or 13 or 15 or 17 or 23 mod 28 −−>χ(a)＝−1、 それ以外の a ではχ(a)＝0」というχ(a)に対応した L(χ,s)となる。このχ(a)の導手 N は N＝28 である。

この LJ(s)ゼータは、私が16年も前に研究していたものでもある。
重回積分 π/14 代入⇒http://www5b.biglobe.ne.jp/~sugi_m/page095.htm
念のため、合同方程式と平方剰余の相互法則から上記の級数の形が正しいことを今回再度確認した。OKである。

なお、“LP()”や“Lp( )”また”LJ( )”という記法は、私が独自に以前から用いているものであり、一般的な記号ではないので注意いただきたい。

今回も過去の結果を一部利用する。Lp(1)6分割は(その46)で得た結果を流用する。LJ(2)6分割は(その84)のζ(2)つまり Z(2)の7分割での6分身として実質的には導いているが、厳密にするために今回計算した。

では、m＝7 の場合を検証しよう。

＜m=7 の場合の予想の検証＞

予想中の②の x に 13/14 を代入して、次を得る。
$(14^4/26^2)(A -a/13)=(\pi^2 \cdot 14^2/(4^2 \cdot 13^2))/\cos^2(13\pi/28) -(\pi \cdot 14^3/(8 \cdot 13^3))\tan(13\pi/28)$ −−−−−−③

ここで、左辺の A, a は次のものである。
$A＝1 +1/27^2 +1/29^2 +1/55^2 + 1/57^2 +1/83^2 + \cdots$
$a＝1 −1/27 +1/29 −1/55 +1/57 −1/83 + \cdots$

予想中の②の x に 11/14 を代入して、次を得る。

$(14^4/22^2)(B - b/11) = (\pi^2 \cdot 14^2/(4^2 \cdot 11^2))/\cos^2(11\pi/28) - (\pi \cdot 14^3/(8 \cdot 11^3))\tan(11\pi/28)$ ------④

ここで、左辺の B, b は次のものである。

$B = 1/3^2 + 1/25^2 + 1/31^2 + 1/53^2 + 1/59^2 + 1/81^2 + \cdots$

$b = 1/3 - 1/25 + 1/31 - 1/53 + 1/59 - 1/81 + \cdots$

予想中の②の x に 9/14 を代入して、次を得る。

$(14^4/18^2)(C - c/9) = (\pi^2 \cdot 14^2/(4^2 \cdot 9^2))/\cos^2(9\pi/28) - (\pi \cdot 14^3/(8 \cdot 9^3))\tan(9\pi/28)$ ------⑤

ここで、左辺の C, c は次のものである。

$C = 1/5^2 + 1/23^2 + 1/33^2 + 1/51^2 + 1/61^2 + 1/79^2 + \cdots$

$c = 1/5 - 1/23 + 1/33 - 1/51 + 1/61 - 1/79 + \cdots$

予想中の②の x に 5/14 を代入して、次を得る。

$(14^4/10^2)(D - d/5) = (\pi^2 \cdot 14^2/(4^2 \cdot 5^2))/\cos^2(5\pi/28) - (\pi \cdot 14^3/(8 \cdot 5^3))\tan(5\pi/28)$ ------⑥

ここで、左辺の D, d は次のものである。

$D = 1/9^2 + 1/19^2 + 1/37^2 + 1/47^2 + 1/65^2 + 1/75^2 + \cdots$

$d = 1/9 - 1/19 + 1/37 - 1/47 + 1/65 - 1/75 + \cdots$

予想中の②の x に 3/14 を代入して、次を得る。

$(14^4/6^2)(E - e/3) = (\pi^2 \cdot 14^2/(4^2 \cdot 3^2))/\cos^2(3\pi/28) - (\pi \cdot 14^3/(8 \cdot 3^3))\tan(3\pi/28)$ ------⑦

ここで、左辺の E, e は次のものである。

$E = 1/11^2 + 1/17^2 + 1/39^2 + 1/45^2 + 1/67^2 + 1/73^2 + \cdots$

$e = 1/11 - 1/17 + 1/39 - 1/45 + 1/67 - 1/73 + \cdots$

予想中の②の x に 1/14 を代入して、次を得る。

$(14^4/2^2)(F - f) = (\pi^2 \cdot 14^2/(4^2 \cdot 1^2))/\cos^2(\pi/28) - (\pi \cdot 14^3/(8 \cdot 1^3))\tan(\pi/28)$ ------⑧

ここで、左辺の F, f は次のものである。

$F = 1/13^2 + 1/15^2 + 1/41^2 + 1/43^2 + 1/69^2 + 1/71^2 + \cdots$

$f = 1/13 - 1/15 + 1/41 - 1/43 + 1/69 - 1/71 + \cdots$

さて、③～⑧左辺の a, b, c, d, e, f の値は、予想中の①の x に 13/14, 11/14, 9/14, 5/14, 3/14, 1/14 を代入した結果として既に（その46）の Lp(1) ６分割で得ている。その結果を流用すると、a～f の値は次となる（右辺）。

$a = 1 - 1/27 + 1/29 - 1/55 + 1/57 - 1/83 + \cdots = (\pi/28)\tan(13\pi/28)$

$b = 1/3 - 1/25 + 1/31 - 1/53 + 1/59 - 1/81 + \cdots = (\pi/28)\tan(11\pi/28)$

$c = 1/5 - 1/23 + 1/33 - 1/51 + 1/61 - 1/79 + \cdots = (\pi/28)\tan(9\pi/28)$

$d = 1/9 - 1/19 + 1/37 - 1/47 + 1/65 - 1/75 + \cdots = (\pi/28)\tan(5\pi/28)$

$e = 1/11 - 1/17 + 1/39 - 1/45 + 1/67 - 1/73 + \cdots = (\pi/28)\tan(3\pi/28)$

$f = 1/13 - 1/15 + 1/41 - 1/43 + 1/69 - 1/71 + \cdots = (\pi/28)\tan(\pi/28)$

これら a, b, c, d, e, f 値（右辺値）を③～⑧に代入すると、A, B, C, D, E, F の値として次を得る（右辺）。

$A = 1 + 1/27^2 + 1/29^2 + 1/55^2 + 1/57^2 + 1/83^2 + \cdots = (\pi/28)^2/\cos^2(13\pi/28)$

$B = 1/3^2 + 1/25^2 + 1/31^2 + 1/53^2 + 1/59^2 + 1/81^2 + \cdots = (\pi/28)^2/\cos^2(11\pi/28)$

$C = 1/5^2 + 1/23^2 + 1/33^2 + 1/51^2 + 1/61^2 + 1/79^2 + \cdots = (\pi/28)^2/\cos^2(9\pi/28)$

$D = 1/9^2 + 1/19^2 + 1/37^2 + 1/47^2 + 1/65^2 + 1/75^2 + \cdots = (\pi/28)^2/\cos^2(5\pi/28)$

$E = 1/11^2 + 1/17^2 + 1/39^2 + 1/45^2 + 1/67^2 + 1/73^2 + \cdots = (\pi/28)^2/\cos^2(3\pi/28)$

$F = 1/13^2 + 1/15^2 + 1/41^2 + 1/43^2 + 1/69^2 + 1/71^2 + \cdots = (\pi/28)^2/\cos^2(\pi/28)$

これで準備は整った。

” a−b−c +d+e−f”と“A +B −C +D−E−F“を計算すると、次のように Lp(1)と LJ(2)ができてくる！

a−b−c +d+e−f

$= 1 - 1/3 - 1/5 + 1/9 + 1/11 - 1/13 +/15 - 1/17 - 1/19 + 1/23 + 1/25 - 1/27$

$\quad + 1/29 - 1/31 - 1/33 + 1/37 + 1/39 - 1/41 + 1/43 - 1/45 - 1/47 + 1/51 + 1/53 - 1/55 + \cdots$

$= Lp(1)$

$= (\pi/28)\{\tan(13\pi/28) - \tan(11\pi/28) - \tan(9\pi/28) + \tan(5\pi/28) + \tan(3\pi/28) - \tan(\pi/28)\}$

$\boldsymbol{= \pi/(2\sqrt{7})}$

A +B −C +D−E−F

$= 1 + 1/3^2 - 1/5^2 + 1/9^2 - 1/11^2 - 1/13^2 - 1/15^2 - 1/17^2 + 1/19^2 - 1/23^2 + 1/25^2 + 1/27^2$

$\quad + 1/29^2 + 1/31^2 - 1/33^2 + 1/37^2 - 1/39^2 - 1/41^2 - 1/43^2 - 1/45^2 + 1/47^2 - 1/51^2 + 1/53^2 + 1/55^2 + \cdots$

$= LJ(2)$

$= (\pi/28)^2\{1/\cos^2(13\pi/28) + 1/\cos^2(11\pi/28) - 1/\cos^2(9\pi/28) + 1/\cos^2(5\pi/28) - 1/\cos^2(3\pi/28)$

$\quad - 1/\cos^2(\pi/28)\}$

$\boldsymbol{= 2\pi^2/(7\sqrt{7})}$

結局、a, −b, −c, d , e, −f が Lp(1)の６分身であり、A, B, −C, D, −E, −F が LJ(2)の６分身となっている。

Lp(1)の最右辺値は、虚２次体の類数公式より得られる $LP(1) = \pi/\sqrt{7}$ を用いて、$Lp(1) = LP(1)/2$ の関係から出る。

一方、LJ(2)の最右辺値の導出は、三角関数からの手計算では困難だが、(有理数) × $\pi^2/\sqrt{7}$ の予想と Excel での数値計算で **$2\pi^2/(7\sqrt{7})$**と分かった。

念のため、Lp(1)、LJ(2)の級数での値も Excel マクロで数値計算し、それぞれ **$\pi/(2\sqrt{7})$**と **$2\pi^2/(7\sqrt{7})$**に収束することを確認した。OK。

このように予想中の①、②の x に 13/14, 11/14, 9/14, 5/14, 3/14, 1/14 を代入することで、Lp(1) と LJ(2)の6分割が同時に得られることが分かった。また、それぞれのゼータの特殊値が求まったことにも注目したい。

よって、m＝7 での予想の正しさが確認できた。
（検証終わり）

このようにして、m＝7 での成立が確認できた。

二つの部分分数展開式に x に 13/14, 11/14, 9/14, 5/14, 3/14, 1/14 を代入することで、Q(√−7) と Q(√7)の各ゼータの6分割が同時に得られ、その分身から各ゼータが構成される（特殊値が求まる！）というこの美しい構造を味わっていただきたい。

Lp(1)と LJ(2)の二式を再掲しよう。分母が√7 で揃っていて、きれいである。

Lp(1)＝1 −1/3 −1/5 +1/9 +1/11 −1/13 +/15 −1/17 −1/19 +1/23 +1/25 −1/27
+1/29 −1/31−1/33 +1/37 +1/39 −1/41 +1/43 −1/45 −1/47 +1/51 +1/53 −1/55 + ・・・
＝π/(2√7)

LJ(2)＝1 $+1/3^2 -1/5^2+1/9^2-1/11^2-1/13^2-1/15^2-1/17^2+1/19^2-1/23^2+1/25^2+1/27^2$
$+1/29^2+1/31^2-1/33^2+1/37^2-1/39^2-1/41^2-1/43^2-1/45^2+1/47^2-1/51^2+1/53^2+1/55^2+$ ・・・
＝$2\pi^2/(7\sqrt{7})$

最後に、テーマの整理と備忘録の意味から、構想や予想、妄想、つぶやきを述べておく。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝
●m＝2 のケースでは、どちらのゼータ値にも分母に√2 が出た。⇒（その191）
m＝3 のケースでは、どちらのゼータ値にも分母に√3 が出た。⇒（その192）
m＝5 のケースでは、どちらのゼータ値にも分母に√5 が出た。⇒（その193）
m＝6 のケースではどちらのゼータ値にも分母に√6 が出た。⇒（その194）
m＝7 のケースではどちらのゼータ値にも分母に√7 が出た。⇒今回

これは　本当になにかあるとしかおもえない。

分母の有理化をすれば、“分子に”としても同じことだが・・

２次体 Q(√−m)と Q(√m)をペアで並べることで、L(χ,s)ゼータに潜むとてつもない秩序が見えてきているように思う。
＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

2021.4.10　杉岡幹生

（参考文献）

・「解決！フェルマーの最終定理」（加藤和也著、日本評論社）