＜ L(1)分割固有方程式の多項式を生む漸化式 ＞

L(1)分割の固有方程式の多項式を生み出す漸化式を見出したので紹介したい。

それは、１年近く前に発見した、L(1)分割固有方程式の多項式を特殊解（特解）として持つ微分方程式とも関連することになるので、固有方程式とともにそれをまず示しておく。

（その１１８）から抜粋（若干言葉を編集した）。

L (1) n 分割の微分方程式

$$(x^2+1)y'' - 2(n-1)xy' + n(n-1)y = 0 \quad \text{-----}[1]$$

(n=1, 2, 3・・)

または

$$(x^2+1)^n \frac{d}{dx}\left\{(x^2+1)^{1-n}\frac{dy}{dx}\right\} = n(1-n)y \quad \text{------}[2]$$

[1]と[2]は、本質的に同じ微分方程式である。

[1]と[2]は以下のL(1) n分身の値を解に持つ固有方程式での y=左辺多項式を解にもつ。例えばL(1)３分身の場合、n=3 とした[1]と[2]は、y= x^3 $-3x^2$ $-3x$ +1 を特殊解に持つ。

L(1)１分身の値を解に持つ固有方程式⇒ $x -1=0$
L(1)２分身の値を解に持つ固有方程式⇒ $x^2 -2x -1=0$
L(1)３分身の値を解に持つ固有方程式⇒ $x^3 -3x^2 -3x +1=0$
L(1)４分身の値を解に持つ固有方程式⇒ $x^4 -4x^3 -6x^2 +4x +1=0$
L(1)５分身の値を解に持つ固有方程式⇒ $x^5 -5x^4 -10x^3 +10x^2 +5x -1=0$
L(1)６分身の値を解に持つ固有方程式⇒ $x^6 -6x^5 -15x^4 +20x^3 +15x^2 -6x -1=0$
L(1)７分身の値を解に持つ固有方程式⇒ $x^7 -7x^6 -21x^5 +35x^4 +35x^3 -21x^2 -7x +1=0$
・・・・・・

この微分方程式が超幾何微分方程式の一種となっていることは（その１１８）で見た通りである。

さて、n分身の値を解に持つ固有方程式（代数方程式）の多項式を $L_n(x)$ とおくと、上記を参考にして、次のようになる。

＜ L(1)分割固有方程式の多項式 $L_n(x)$ ＞

$L_1(x) = x -1$
$L_2(x) = x^2 -2x -1$

$L_3(x)=x^3 -3x^2 -3x +1$
$L_4(x)=x^4 -4x^3 -6x^2 +4x +1$
$L_5(x)=x^5 -5x^4 -10x^3 +10x^2 +5x -1$
$L_6(x)=x^6 -6x^5 -15x^4 +20x^3 +15x^2 -6x -1$
$L_7(x)=x^7 -7x^6 -21x^5 +35x^4 +35x^3 -21x^2 -7x +1$
・・・・・・

この多項式がいかに重要であるかはこれまで見てきた通りだが、その重要性は、チェビシェフの多項式、ラゲールの多項式、エルミートの多項式、ルジャンドルの多項式などと比べてもひけをとらない。
それはあまりにも美しい対称性を有していて、L(s)ゼータの神秘を背負いこんだものとなっている。にもかかわらず、web で検索してもこの多項式はヒットせず、なにも研究されていないとわかる。

多項式 $L_n(x)$ の係数がパスカルの三角形を形成していることも大事な事実である。係数がパスカルの三角形となっていることを確認いただきたい。(すぐわかりますね?)

上記チェビシェフ、ラゲール・・などの有名多項式は全て直交多項式である。もちろん $L_n(x)$ 多項式も直交性を有していて、固有方程式に対応する実対称行列の固有ベクトルの直交性を以前見た。

多項式 $L_n(x)$ を眺めていて、これらを生み出す母関数があるのではなかろうか?とふと思った。

公式集のチェビシェフ他の多項式を見ると、すべて母関数があるではないか!
ということは、$L_n(x)$ 多項式を生む母関数もあるに違いないと思った。ただし母関数を求めるのは、難しく困難が予想される・・

公式集には、上記の有名な多項式では母関数とともに漸化式も示されている!$L_n(x)$ 多項式の漸化式は簡単に発見できた。それは次の①となる。

****

＜L(1)分割固有方程式の多項式 $L_n(x)$ に対する漸化式＞

$$L_{n+2}(x) -2xL_{n+1}(x) +(x^2+1)L_n(x) =0 \quad \text{-----①}$$
$$(n=1,2,3\cdots)$$

****

このように漸化式は簡単に求まった。

どのようにして求めたかを述べる。
「L(1)分割の固有方程式を１回微分すると一つ次数の低い固有方程式になる」というふしぎな事実を使った。
それは冒頭の式で簡単に確かめられるので見ていただきたいが、例えば、４分割の固有方程式を１回微分した

ら、３分割の固有方程式になる。（もちろん、それは$L_n(x)$多項式を１回微分すると$nL_{n-1}(x)$になることと同じである）

これはとても面白い性質である。この性質はかなり以前から気づいていて「ふしぎだ！なにかある」と思ってきた。その性質と冒頭の微分方程式[1]を組み合わせることで、すぐに①が出た。その導出過程を示す。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

［導出過程］

$L_n(x)$多項式を１回微分すると$nL_{n-1}(x)$になる。つまり、次のようになる。

$L_n'(x)=nL_{n-1}(x)$　　----②

$L_n''(x)=nL_{n-1}'(x)=n(n-1)L_{n-2}(x)$　　----③

$y=L_n(x)$とすると、冒頭の微分方程式[1]に対し、②、③を使って次を得る。

$(x^2+1)n(n-1)L_{n-2}(x)\ -2(n-1)x\cdot nL_{n-1}(x)\ +n(n-1)L_n(x)=0$

両辺$n(n-1)$で割って（きれいに割れる！）、次のようになる。

$(x^2+1)L_{n-2}(x)\ -2xL_{n-1}(x)\ +L_n(x)=0$

項を並べ変えて、次を得る。

$L_n(x)\ -2xL_{n-1}(x)\ +(x^2+1)L_{n-2}(x)=0$

ここでnを$n+2$に置き換えて、次の目的の漸化式が求まった。

$$L_{n+2}(x)\ -2xL_{n+1}(x)\ +(x^2+1)L_n(x)\ =0$$

[終わり]

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

このようにして漸化式を導出できた。

漸化式が求まったので、低次元の$L_1(x)=x\ -1$と$L_2(x)=x^2\ -2x\ -1$から出発してどこまでも先の次数の多項式$L_n(x)$をどんどんと機械的に求めることができるようになった。

これまでその低次⇒高次の方向ができなかったのだが、漸化式が求まり、それが可能となったのはうれしいことである。

上で述べたように、これまで高次式をどんどんと微分することで低次式が求まることはわかっていたが、その方法では高次式を機械的に求めることはできない。

（パスカルの三角形で求めればよいではないか？と思われるかもしれないが、野暮な方法であるし、$\zeta(2)$では全くコントロールを失ってしまう。一般化していくには、やはり漸化式が必要なのである。）

今回、漸化式を見出したことで低次⇒高次の方向が可能になった。ついに無限をとらえることができた。

2020.4.24　杉岡幹生

＜参考文献＞

「マグロウヒル　数学公式・数表ハンドブック」(Muray R. Spiegel 著、氏家勝巳訳)