＜２次実−双対角対称行列における予想の証明＞

ここしばらくゼータ分割の研究途上で発見した予想問題（下記①）という別の洞窟？を調べている。そこは、ゼータ分割の本道から少し外れた位置にあるのだが、広そうであり別鉱脈ともつながっている感じもあって、しばらくここを調べたい。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

＜実−双対角対称行列における行列方程式予想＞

「ｎ次の実−双対角対称行列は、そのｎ次固有方程式に対応するｎ次行列方程式において、ｎ個の行列解をもつ。それらｎ個の行列解は、解と係数の関係を満たす。」--------①

注記：実−双対角対称行列は、実対称行列の一種であり、右下方向と左下方向のそれぞれの対角線に対して対称で、且つそれぞれの対角線以外の成分は全て０となる。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

本予想の周辺で、これまでしたことを整理すると、次となる。

****

・（その１３７）、（その１３９）でＬ(3)の２分身と３分身で本予想が成り立つことを見た。

・（その１３８）で、実−双対角対称行列は掛け算に関して可換であることを証明した。これが①の予想を支えるキーである。

・（その１４０）でＬ(1)、Ｌ(3)で本予想が同様に成り立つことを＜２分身のケース＞で示した。

****

実−双対称行列は、例えば、４次と５次では次のような美しい対称的なものである（成分は実数）。

$$G4=\begin{bmatrix}\alpha & 0 & 0 & \beta\\ 0 & a & b & 0\\ 0 & b & a & 0\\ \beta & 0 & 0 & \alpha\end{bmatrix}\qquad G5=\begin{bmatrix}\alpha & 0 & 0 & 0 & \beta\\ 0 & a & 0 & b & 0\\ 0 & 0 & c & 0 & 0\\ 0 & b & 0 & a & 0\\ \beta & 0 & 0 & 0 & \alpha\end{bmatrix}$$

さて、これまではゼータ分割に関するケースで①を見てきた。ゼータとは無関係に一般的に任意の実−双対角対称行列で①は本当に成立するだろうか？

２次の場合、①が任意の実−双対角対称行列で成り立つことを簡単に証明することができる。以下証明を示す。

＝＝

任意の２次実−双対角対称行列で予想が成り立つことの証明

＜実−双対角対称行列における行列方程式予想＞

「ｎ次の実−双対角対称行列は、そのｎ次固有方程式に対応するｎ次行列方程式において、ｎ個の行列解をもつ。それらｎ個の行列解は、解と係数の関係を満たす。」--------①

n=2 の場合、つまり２次の実−双対角対称行列に対し①が正しいこと証明する。
まず２次の実−双対角対称行列を次のようにおく。

$$X=\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} \quad \text{-----②}$$

ここで、a, b は実数。　さて、この行列 X の固有方程式（代数方程式）は次となる。

$x^2-2ax+a^2-b^2=0$ ------③

③は、②が非自明な固有ベクトルを持つ条件$|X-\lambda E|=0$ ---④から導出できる（λ:固有値、E:単位行列)。
④を展開すると、$\lambda^2-2a\lambda+a^2-b^2=0$ となる。λを x に置き換えると③が得られる。

③を解くと、二つの解（固有値）$x_1=a+\sqrt{b^2}$、$x_2=a-\sqrt{b^2}$ が得られる。絶対値| |で表現すると、次となる。

$x_1=a+|b|$、$x_2=a-|b|$ ------④

x_1、x_2は、③において当然次の解と係数の関係を満たす。

$x_1+x_2=2a$, $x_1x_2=a^2-b^2$

さて、④から b はプラスでもマイナスでも③の解となることがわかる。これをヒントに、②から次の二つの実−双対角対称行列を構成する。

$$X_1=\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}, \quad X_2=\begin{bmatrix} a & -b \\ -b & a \end{bmatrix} \quad \text{-----⑤}$$

また③の固有方程式に対応する次の行列方程式も構成する。

行列方程式 $X^2-2aX+(a^2-b^2)E=O$ ------⑥

ここで、X, E, Oは 2 次の正方行列。E は単位行列、Oは零行列。

さて、⑤の二つは「⑥の解であり、解と係数の関係を満たす」であろうか？　答えは Yes.　まず X_1 では

$$X_1^2-2aX_1+(a^2-b^2)E=\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}-2a\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}-(a^2-b^2)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}=O$$

よって、X_1 は行列方程式⑥を満たしている。同様にして、X_2 も⑥を満たしている。

また、次のように⑥の行列方程式における解と係数の関係が成り立っている！

$$X_1+X_2=\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} a & -b \\ -b & a \end{bmatrix}=2a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=2aE$$

$$X_1X_2(=X_2X_1)=\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & -b \\ -b & a \end{bmatrix}=(a^2-b^2)E$$

よって、⑤の二つは「⑥の解であり、解と係数の関係を満たす」ことが分かった。

なお、b＝0 の場合は⑤の二つは一致し、それらは⑥の重解となる。その場合でも解と係数の関係は成り立っている。（確認されたし）

　以上より、任意の２次の実-双対角対称行列で、①の予想が成立していることが分かった。
（証明終わり）
＝＝＝

　このように２次の場合は、予想は完全に正しいことが分かった。

$X=\begin{bmatrix}2 & 5\\5 & 2\end{bmatrix}$, $X=\begin{bmatrix}-3 & 4\\4 & -3\end{bmatrix}$, $X=\begin{bmatrix}1.5 & 10\\10 & 1.5\end{bmatrix}$

など具体的な例で成り立っていることを手で確認いただきたい。
　なお、本予想において、ケーリー・ハミルトンの公式がその前段階として成り立っているのは、当然のことである。本予想とケーリー・ハミルトンは別の話である。

　以下、本予想周辺で気づいた点や漠然とした方向性などをメモしておく。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝
●３次も任意で成り立つと思われる（（その１３９）では一例を見た）、置換が複雑化してくるので証明はもっと長くなるだろう。

●行列の群（無限群）は、普通は掛け算に関して非可換である。一方、実-双対角対称行列から構成される無限群は、可換群（アーベル群）となる。「実-双対角対称行列が群を構成し、それがアーベル群になる」ことの証明は近いうちに示したい。“アーベル群”ということからそれは特別な行列群といえる。

●分割されたゼータ（ゼータの分身たち）は明示的な特殊値のゼータ（例えば、L(1)やζ(2)など）から生まれてくる。逆に、明示的な特殊値のゼータは、分身たちによって構成される。
　ゼータ分割の構造を統制しているのは、実-双対角対称行列（実対称行列）であるとわかってきた。
　以前開発したテイラーシステムにより、明示的な特殊値は、自明な零点によってもたらされることがわかっている。自明な零点は非自明な零点とつながっているはず。ゼータ分割でのおそろしいまでの対称性は、零点域の究極の対称性を反映していると考えられる。

●上記の対称性によって、ゼータの分身たちの値は、π を除いて、全てべき根で表現されるはずである。今回の証明中の「b の値はプラスとマイナスどちらでもよい」事実は、ガロア理論との関係を暗示しているのか。確信があるわけではないが、実-双対角対称行列は、複雑なガロア理論を簡単化する力をも秘めているのかもしれない。
＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

2020.1.11　杉岡幹生