＜　L(1)n 分割固有方程式の判別式の値　＞

　L(1)n 分割の分身たちを生み出す固有方程式の判別式を考察したので報告します。その判別式の値を求めた結果、特徴的な値が得られました。

　結論を先に示します。一連の n 分割の固有方程式の判別式の値を D_n とすると、それは次のようになります。

$$D_n=2^{(n-1)^2}n^n \qquad \text{------①}$$

　このように非常にきれいな結果になりました。

　文字が見にくいかもしれませんが、①は、{2 の $(n-1)^2$ 乗} ×(n の n 乗)です。L(1)はＬ(χ，ｓ)ゼータの一種の虚 2 次体 Q(√‾-1)ゼータ L(s)の s=1 の次のもので、有名な式です。

　L(1)＝1 -1/3 +1/5 -1/7 +1/9 -1/11 +1/13 -1/15 +1/17 -1/19 +1/21 -1/23 +・・＝π/4　　-----②

　以下、①の導出過程を示しますが、まず最初にＬ(1)n 分身の値を解に持つ固有方程式（代数方程式）を掲げます。これまで見てきた次のものになります。

＝＝

＜１分割の分身の値を解にもつ方程式＞

$x -1=0$

＜２分割の分身たちの値を解にもつ方程式＞

$x^2 -2x -1=0$

＜３分割の分身たちの値を解に持つ方程式＞

$x^3 -3x^2 -3x +1=0$

＜４分割の分身たちの値を解に持つ方程式＞

$x^4 -4x^3 -6x^2 +4x +1=0$

＜５分割の分身たちの値を解に持つ方程式＞

$x^5 -5x^4 -10x^3 +10x^2 +5x -1=0$

＜６分割の分身たちの値を解に持つ方程式＞

$x^6 -6x^5 -15x^4 +20x^3 +15x^2 -6x -1=0$

＜７分割の分身たちの値を解に持つ方程式＞

$x^7 -7x^6 -21x^5 +35x^4 +35x^3 -21x^2 -7x +1=0$

・

・

上記の方程式は係数の並びが”パスカルの三角形”になっています。

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

1 7 21 35 35 21 7 1

例えば、＜３分割の分身たちの値を解に持つ方程式＞ $x^3-3x^2-3x+1=0$ は、下記のＬ(1)３分割の分身たち B1, -B2, B3 に対応する tan(5π/12) ＝2+√3、-tan(3π/12) ＝-1、tan(π/12) ＝2-√3 の三つを解に持ちます。

（その９６）から抜粋。

****

■L(1)３分割

B1＝ 1 -1/11 +1/13 -1/23 +1/25 -1/35 +・・＝(π/12)tan(5π/12)

B2＝1/3 -1/9 +1/15 -1/21 +1/27 -1/33 +・・＝(π/12)tan(3π/12)

B3＝1/5 -1/7 +1/17 -1/19 +1/29 -1/31 +・・＝(π/12)tan(π/12)

B1 -B2 +B3＝π/4＝L(1) である。B1, -B2, B3 がＬ(1)３分身である。

tan()の部分は右の通り。 tan(5π/12) ＝2+√3、tan(3π/12) ＝1、tan(π/12) ＝2-√3

****

＝＝

さて、一般の代数方程式 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_n=0$ -----③の判別式は、次のように定義されます。f(x)＝0 の根を $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots \alpha_n$ とすると、

$$D=a_0^{n(n-1)}\prod_{i<j}(\alpha_j-\alpha_i)^2 \quad \text{-----④}$$

よって、例えば、＜４分割の分身たちの値を解に持つ方程式＞ $x^4-4x^3-6x^2+4x+1=0$ ----⑤
の四つの解を $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ とすると、④から⑤の判別式は次となります。

$$D=(\alpha_4-\alpha_3)^2(\alpha_4-\alpha_2)^2(\alpha_4-\alpha_1)^2(\alpha_3-\alpha_2)^2(\alpha_3-\alpha_1)^2(\alpha_2-\alpha_1)^2 \quad \text{------⑥}$$

（その１４）でのＬ(1)４分割の下記の結果を参考にして、⑤の四つの解は次となります。

B1 から⇒ $\alpha_1=\tan(7\pi/16)$

-B2 から⇒ $\alpha_2=-\tan(5\pi/16)$

B3 から⇒ $\alpha_3=\tan(3\pi/16)$

-B4 から⇒ $\alpha_4=-\tan(\pi/16)$

（その１４）より抜粋。

****

■L(1)４分割

B1＝ 1 -1/15 +1/17 -1/31 +1/33 -1/47 +・・ ＝(π/16)tan(7π/16)

B2＝1/3 -1/13 +1/19 -1/29 +1/35 -1/45 +・・＝(π/16)tan(5π/16)

B3＝1/5 -1/11 +1/21 -1/27 +1/37 -1/43 +・・＝(π/16)tan(3π/16)

B4＝1/7 -1/9 +1/23 -1/25 +1/39 -1/41 +・・ ＝(π/16)tan(π/16)

tan()を計算した結果は、以下の通り。

tan(7π/16)＝1+√2+√(4+2√2)、tan(5π/16)＝-1+√2+√(4-2√2)

tan(3π/16)＝1-√2+√(4-2√2)、tan(π/16) ＝-1-√2+√(4+2√2)

B1 -B2 +B3 -B4＝π/4＝L(1) であることがわかる。B1, -B2, B3, -B4 がL(1)４分身である。

****

上記α_1, α_2, α_3, α_4と⑥から、固有方程式⑤の判別式の値D_4を計算すると、次のようになりました。

D_4＝131072＝$2^9 4^4$

２分割から７分割までの結果をすべて示すと、次のようになります。

２分割⇒$D_2=2\cdot 2^2$
３分割⇒$D_3=2^4\cdot 3^3$
４分割⇒$D_4=2^9\cdot 4^4$
５分割⇒$D_5=2^{16}\cdot 5^5$
６分割⇒$D_6=2^{25}\cdot 6^6$
７分割⇒$D_7=2^{36}\cdot 7^7$

D_7では、$D_7=2^{36}\cdot 7^7$＝56593444029595648 とたいへんな数になります。D_5以降は手計算では無理で、高精度計算サイトのお世話になりました。
https://keisan.casio.jp/calculator

上記の一連の結果から冒頭の結果①に行き着いたというわけです。

$$D_n=2^{(n-1)^2}n^n \qquad \text{------①}$$

厳密には予想ですが、任意のｎでこうなっていることは間違いありません。

それにしても①は異様に美しい形です。この異様さ、妖しさは一体何なんでしょうか。

突然ですが、フェルマー予想の解決において、フライという数学者が決定的な役割を果たしたことは有名です。「ファルマーの大定理が解けた！」（足立恒雄著、講談社）の中に、“フライの楕円曲線”の判別式を考察した部分があります。

p.161～162 から引用します。

==

フライの楕円曲線

$En: y^2 = x(x+a^n)(x-b^n)$ ------①

をもう一度取り上げよう。ここに a,b,c はフェルマー方程式

$a^n+b^n=c^n$ ------②

の互いに素な自然数解である。

・・・(略)・・

フライの楕円曲線①の判別式を計算してみよう。

$D=\{a^n \cdot b^n \cdot (a^n+b^n)\}^2$

$=(abc)^{2n}$ （②による）

つまり、判別式は自然数の 2n 乗数である。これだけでもう、相当異様な感じである。

==

このように足立氏は、「相当異様な感じ」と述べています。楕円曲線に限らず方程式の判別式は重要であり、方程式の本質が詰まっているような気がします。異様なものに本質あり！といえるかもしれません。

加藤和也さんは「解決！フェルマーの最終定理」（加藤和也著、日本評論社）の中で、「判別式は楕円曲線にとって重要な量であることが知られています」と述べ、足立氏と同様な個所を考察しています。フライの研究がきっかけとなって、ワイルスのフェルマー予想解決へとつながったことはあまりにも有名です。

$$D_n=2^{(n-1)^2}n^n$$

今回得たこの結果も何かを示唆しているように見えます。

$L(1)=1 -1/3 +1/5 -1/7 +1/9 -1/11 +1/13 -1/15 +1/17 -1/19 +1/21 -1/23 +\cdots=\pi/4$

単発的に見えるこの L(1) 式の裏側には、この１年間見てみてきた通り、壮大な構造（物語）が隠されています。それは L(1) が n 分割可能である（分身たちが生まれてくる）ということ。その n 分割に対応する一連の固有方程式（上方参照）の特徴は、「すべての解が実数解である。すべての解は対称的にべき根（n 乗根）で表される。」となっている（はずの）ことであり（ガロア理論に関係）、それらの特別な特徴が D_n の値に反映されているのかもしれません。

2019.8.15　杉岡幹生