＜L(1)７分身の値を固有値として持つ実対称行列(エルミート行列)＞ rev1.01

今回はL(1)の７分身の値を固有値に持つ実対称行列（エルミート行列）が求まったので報告します。流れでは（その１０２）L(1)６分身の続きとなります。L(1)の微分方程式も出たので、後半の[5]で言及しました。

[L(1)分割-実対称行列 予想]

「L(1)のn分身の特殊値を解にもつ代数方程式」＝「実対称行列(エルミート行列)の固有方程式」となっていて、その固有方程式の固有値は分身たちの特殊値に本質的に一致する。

ここで“n 分身”の意味は、次のタンジェント部分分数展開式の x に m/(2n)を代入して求めた n 分割の n 個の分身たちを指す。(n は 1 以上の整数。m＝1, 3, 5・・, 2n-1)

$$1/(1^2-x^2)+1/(3^2-x^2)+1/(5^2-x^2)+\cdots=(\pi/(4x))\tan(\pi x/2)$$

以下、L(1)７分身の値を固有値として持つ実対称行列（エルミート行列）を求めていきます。

$$L(1)=1-1/3+1/5-1/7+1/9-1/11+1/13-1/15+1/17-1/19+1/21-1/23+\cdots=\pi/4 \quad \text{------①}$$

はじめにL(1)７分身を示します。（その３０）から抜粋。

＝＝

■L(1)７分割

$A1=1-1/27+1/29-1/55+1/57-1/83+\cdots=(\pi/28)\tan(13\pi/28)$

$A2=1/3-1/25+1/31-1/53+1/59-1/81+\cdots=(\pi/28)\tan(11\pi/28)$

$A3=1/5-1/23+1/33-1/51+1/61-1/79+\cdots=(\pi/28)\tan(9\pi/28)$

$A4=1/7-1/21+1/35-1/49+1/63-1/77+\cdots=(\pi/28)\tan(7\pi/28)$

$A5=1/9-1/19+1/37-1/47+1/65-1/75+\cdots=(\pi/28)\tan(5\pi/28)$

$A6=1/11-1/17+1/39-1/45+1/67-1/73+\cdots=(\pi/28)\tan(3\pi/28)$

$A7=1/13-1/15+1/41-1/43+1/69-1/71+\cdots=(\pi/28)\tan(\pi/28)$

A1 -A2 +A3 -A4 +A5 -A6+A7＝L(1) である。A1 ,-A2, A3, -A4, A5, -A6, A7 がL(1)７分身である。
A4 は①のL(1)そのものになっている点にも着目されたい。

＝＝

L(1)７分身のA1, -A2, A3, -A4, A5 -A6, A7のtan部分を解にもつ代数方程式は次となる。

$$x^7-7x^6-21x^5+35x^4+35x^3-21x^2-7x+1=0 \quad \text{------②}$$

②は、tan(13π/28), -tan(11π/28), tan(9π/28), -tan(7π/28) , tan(5π/28) , -tan(3π/28), tan(π/28)の七つを解に持つ。

ここでA1, -A2, A3, -A4, A5 -A6, A7の七つの値すなわち、$(\pi/28)\tan(13\pi/28)$, $-(\pi/28)\tan(11\pi/28)$, $(\pi/28)\tan(9\pi/28)$, $-(\pi/28)\tan(7\pi/28)$,$(\pi/28)\tan(5\pi/28)$,$-(\pi/28)\tan(3\pi/28)$, $(\pi/28)\tan(\pi/28)$ を解に持つ方程式を出すことも当然できますが、それと②は本質的に同じであり、よって②を採用します。つまりこれまでの２～６分身と同じ方針で進めます。まとめます。

＜L(1)７分身の値を解にもつ代数方程式＞

$$x^7 -7x^6 -21x^5 +35x^4 +35x^3 -21x^2 -7x +1=0 \quad \text{---------②}$$

L(1)n分身の値を解に持つ代数方程式を並べるとそれらはパスカルの三角形の数（二項係数）を係数にもつ方程式に対応する。以下の通りです。７分割で②が見える。

＝＝＝

＜１分割の分身の値を解にもつ方程式＞

$x -1=0$

＜２分割の分身たち(A1,-A2)の値を解にもつ方程式＞

$x^2 -2x -1=0$

＜３分割の分身たち(A1,-A2,A3)の値を解に持つ方程式＞

$x^3 -3x^2 -3x +1=0$

＜４分割の分身たち(A1,-A2, A3,-A4)の値を解に持つ方程式＞

$x^4 -4x^3 -6x^2 +4x +1=0$

＜５分割の分身たち(A1,-A2, A3,-A4, A5)の値を解に持つ方程式＞

$x^5 -5x^4 -10x^3 +10x^2 +5x -1=0$

＜６分割の分身たち(A1,-A2, A3,-A4, A5, -A6)の値を解に持つ方程式＞

$x^6 -6x^5 -15x^4 +20x^3 +15x^2 -6x -1=0$

＜７分割の分身たち(A1,-A2, A3,-A4, A5, -A6, A7)の値を解に持つ方程式＞

$x^7 -7x^6 -21x^5 +35x^4 +35x^3 -21x^2 -7x +1=0$

＝＝＝

上記の方程式は係数の並びが”パスカルの三角形”になっています。

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

1 7 21 35 35 21 7 1

さて、②の方程式の解（L(1) 7分身の値）を固有値としてもつエルミート行列（実対称行列）は存在するでしょうか？それは存在し、次となります。(G7の7は7次を表す)

$$G7_{L(1)}=(1/2)\begin{bmatrix} \alpha 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta 1 \\ 0 & \alpha 2 & 0 & 0 & 0 & \beta 2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha 3 & 0 & \beta 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta 3 & 0 & \alpha 3 & 0 & 0 \\ 0 & \beta 2 & 0 & 0 & 0 & \alpha 2 & 0 \\ \beta 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha 1 \end{bmatrix}$$

ここで

$\alpha 1$＝tan(13π/28) +tan(π/28), $\alpha 2$＝-tan(11π/28) -tan(3π/28) , $\alpha 3$＝tan(9π/28) +tan(5π/28)

$\beta 1$＝tan(13π/28) -tan(π/28), $\beta 2$＝tan(11π/28) -tan(3π/28) , $\beta 3$＝tan(9π/28) -tan(5π/28)

恐ろしく対称的な形です！

これまでの分身と同様、右下方向と左下方向のそれぞれの対角線に対して対称となっています。

対角成分は分身たちから成っていることがわかります。例えばα1=(28/π)(A1+A7)なので、そうなっています。対角成分以外はすべてゼロであることにも着目してください。

$G7_{L(1)}$ の固有方程式は、固有値λと自明でない固有ベクトルの存在条件 det($G7_{L(1)}$ −λE)=0 から得られ(Eは単位行列)、$x^7 -7x^6 -21x^5 +35x^4 +35x^3 -21x^2 -7x +1=0$ と求まった。これは②に一致している。その七つの解（固有値）λ_1, λ_2, λ_3, λ_4, λ_5, λ_6, λ_7は当然ながら7分身の値に一致する。固有値と固有ベクトルを以下に示す。

固有値λ_1= tan(13π/28) ＝α1+β1に対応する固有ベクトル $p_1=\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$

固有値λ_2= -tan(11π/28)＝α2−β2に対応する固有ベクトル $p_2=\begin{bmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}$

固有値λ_3= tan(9π/28)＝α3+β3に対応する固有ベクトル　$p_3=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

固有値 λ_4= -tan(7π/28)＝-1 に対応する固有ベクトル　$p_4=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix}$

固有値 λ_5= tan(5π/28)＝$\alpha3-\beta3$に対応する固有ベクトル　$p_5=\begin{bmatrix}0\\0\\1/\sqrt{2}\\0\\-1/\sqrt{2}\\0\\0\end{bmatrix}$

固有値 λ_6= -tan(3π/28) ＝$\alpha2+\beta2$に対応する固有ベクトル $p_6=\begin{bmatrix}0\\1/\sqrt{2}\\0\\0\\0\\1/\sqrt{2}\\0\end{bmatrix}$

固有値 λ_7= tan(π/28) ＝$\alpha1-\beta1$に対応する固有ベクトル　$p_7=\begin{bmatrix}1/\sqrt{2}\\0\\0\\0\\0\\0\\-1/\sqrt{2}\end{bmatrix}$

$\alpha1$, $\beta1$,$\alpha2$, $\beta2$,$\alpha3$, $\beta3$の値は上方を参照。固有ベクトル p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7 は互いに直交する。

$G7_{L(1)}$ をL(1)７分身 A1, -A2, A3, -A4, A5, -A6, A7 の“An”で表現すると次となる。

$$G7_{L(1)}=(14/\pi)\begin{bmatrix}A1+A7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A1-A7\\ 0 & A2+A6 & 0 & 0 & 0 & A2-A6 & 0\\ 0 & 0 & A3+A5 & 0 & A3-A5 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & A3-A5 & 0 & A3+A5 & 0 & 0\\ 0 & A2-A6 & 0 & 0 & 0 & A2+A6 & 0\\ A1-A7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A1+A7\end{bmatrix}$$

A1 -A2 +A3 -A4 +A5 -A6 +A7＝L(1)＝π/4 と合わせて、上記を味わってください。対角成分は分身たちから構成されています。

$\alpha1$, $\beta1$,$\alpha2$, $\beta2$, $\alpha3$, $\beta3$での表現も再掲します。

$$G7_{L(1)}=(1/2)\begin{bmatrix}\alpha1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta1\\ 0 & \alpha2 & 0 & 0 & 0 & \beta2 & 0\\ 0 & 0 & \alpha3 & 0 & \beta3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \beta3 & 0 & \alpha3 & 0 & 0\\ 0 & \beta2 & 0 & 0 & 0 & \alpha2 & 0\\ \beta1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha1\end{bmatrix}$$

ここで
$\alpha1$＝tan(13π/28) +tan(π/28), $\alpha2$＝-tan(11π/28) -tan(3π/28) , $\alpha3$＝tan(9π/28) +tan(5π/28)
$\beta1$＝tan(13π/28) -tan(π/28), $\beta2$＝tan(11π/28) -tan(3π/28) , $\beta3$＝tan(9π/28) -tan(5π/28)

今回、L(1)７分身の値を固有値にもつ実対称行列 $G7_{L(1)}$と固有ベクトルが求まりました。

（その１０２）の予想などのメモを備忘録とまとめの意味で再掲します。少し修正。
＝＝

[1] 特別な対称行列

２分身～６分身と同様７分身の $G7_{L(1)}$ も、右下方向と左下方向のそれぞれの対角線に対して対称となる特別に美しいエルミート行列になっている。任意のｎ分身でそうなると予想される。

これまで求めてきたL(1)エルミート行列の固有ベクトルと、ζ(2)エルミート行列の固有ベクトルは完全に一致した。これも非常に面白い事実である。

[2] 対角成分以外はゼロ

L(1)２分身～７分身の行列では対角線以外の成分は全てゼロになった。ζ(2)２分身～７分身でもそうなる。任意のｎ次で対角成分以外は全てゼロになると考えられる。

[3] 足し算、引き算の世界

ゼータ分身が棲む世界は足し算、引き算の世界である。例えばL(1)７分身は、$G7_{L(1)}$ の対角成分の足し算、引き算から作られる。

[4] 群との関連

ゼータ分割の行列の固有ベクトルを対称行列になるように並べて作った行列Ｔと単位行列Ｅとの集合｛Ｔ, Ｅ｝ は行列の掛け算に関して群となる。分身が棲む世界は対称性の世界であり、群が出てくるのは自然である。巡回群、可換群。

[5] 固有方程式、微分方程式

L(1)分身の特殊値は、パスカル三角形の数（二項係数）を係数にもつ代数方程式の解（根）に関係する。その式をパスカル固有方程式と名づける。

一方、ζ(2)分身の特殊値は、第一種チェビシェフ多項式 Tn(x)　(n=2,4,6,・・)の代数方程式の解に関係する。それをチェビシェフ固有方程式と名付ける。

ｙ＝Tn(x)は“チェビシェフの微分方程式 $(1-x^2)y''-xy'+n^2y=0$　(n=2,4,6,・・)の一連の解である。チェビシェフの微分方程式はスツルムリウビル(Sturm-Liouville)型に属する。(エルミートの微分方程式、ラゲールの微分方程式、ルジャンドルの微分方程式、ベッセルの微分方程式などもスツルムリウビル型である)

L(1)パスカル固有方程式に対応する微分方程式が存在するはずと思い、探していたが、ついに発見できた。

次のものである。

$$(x^2+1)y' - n\{(y-1)^2+1\}=0 \quad (n=1,2,3,\cdots) \qquad \text{----④}$$

例えば、n=3 でＬ(1) ３分割に対応する。しかし、④は非線形であり、線形ではない。線形の形に変形して、(作用素)ｙ＝(固有値)ｙのような形にまでもっていきたい。よって求まった微分方程式はまだ理想形ではない。④はスツルムリウビル型ではないと考えられる。

２次体ゼータも含めた一般的なＬ（χ，ｓ）ゼータの分解に対応する固有方程式の一族が存在し、それに対応する微分方程式の一族が常に存在することが予想される。

[6] 逆行列

現時点でＬ（１）２分身～７分身、ζ（２）２分身～７分身の行列の逆行列が得られている。その逆行列も、右下方向と左下方向のそれぞれの対角線に対して対称となっていて、対角成分以外はすべてゼロになった。７分身の逆行列はすこし後に示したい。

[7] ゼータ分解のエルミート行列は、分解(分割)の構造「倍々ゲーム」を表現する

（その８７）～（その９４）に関連。

※※※

＜ Ｌ(1)分解構造 ＞

Ｌ(1)⇒Ｌ(1) ２分割の分身⇒Ｌ(1) ４分割の分身⇒Ｌ(1) ８分割の分身⇒Ｌ(1) １６分割の分身⇒・・・
Ｌ(1)⇒Ｌ(1) ３分割の分身⇒Ｌ(1) ６分割の分身⇒Ｌ(1) １２分割の分身⇒Ｌ(1) ２４分割の分身⇒・・・
Ｌ(1)⇒Ｌ(1) ５分割の分身⇒Ｌ(1) １０分割の分身⇒Ｌ(1) ２０分割の分身⇒Ｌ(1) ４０分割の分身⇒・・・
Ｌ(1)⇒Ｌ(1) ７分割の分身⇒Ｌ(1) １４分割の分身⇒Ｌ(1) ２８分割の分身⇒Ｌ(1) ５６分割の分身⇒・・・
・・・・・・・・・・・

このように、一つの分身が２つに（倍に）分解する。素数を起点として倍々ゲームで無限に分解（分岐）していく。逆に無限の彼方から見れば、(先頭行を例にとると)・・・・⇒１６分身⇒８分身⇒４分身⇒２分身⇒Ｌ(1)となっている。

※※※

ゼータ分割(分解)の行列は上記の構造を表現していると考えられる。ζ(2)も同様⇒（その７６）～（その８５）。ゼータの背後には、フラクタル的に無限に続く分岐構造（入れ子構造）がある。

上記の「素数を起点として」の個所は、後に修正されるだろう。ゼータ分解(分割)の世界は深い。

[8] ガロア理論、可解群

分身たちの値は√や√√のべき根で表現されるはずである。例えば、その（１０２）の■Ｌ(1) ６分割を見てください。よって、ガロア理論、可解群と関係する。これは[5]とも関係する。

[9] Ｌ（χ，ｓ）の２次体ゼータでも。さらに高次のゼータでも？

エルミート行列（実対称行列）に関しては、L(1)やζ(2)を中心に調べているが、L(3)やζ(4)・・なども同じことになっているはず。さらにL（χ，s）の２次体ゼータでも同種のエルミート行列になっているはずである。

ここまでは１次のゼータの話。２次の楕円曲線（保型形式）ゼータではどうなっているのか？

[10] 行列の左上から右下に向う対角成分はゼータの分解の様子を表す

ゼータ分解を表すエルミート行列の右下方向への対角成分は、上流の次の分割への（元祖へ向かう）ステップを表している。例えばL(1)７分身の $G7_{L(1)}$ の対角成分 A1+A7 と A2+A6 と A3+A4 はL(1)３分身(以下の C1, C2, C3)を表している。

逆の表現をすれば、エルミート行列の右下方向への対角成分はゼータがどんなふうに分解していくかの分解の様子（構造）を表現しているとも言える。

A1 ＝1 -1/27 +1/29 -1/55 +1/57 -1/83 + ・・ ＝(π/28)tan(13π/28)
A2＝1/3 -1/25 +1/31 -1/53 +1/59 -1/81 +・・ ＝(π/28)tan(11π/28)
A3＝1/5 -1/23 +1/33 -1/51 +1/61 -1/79 +・・ ＝(π/28)tan(9π/28)
A4＝1/7 -1/21 +1/35 -1/49 +1/63 -1/77 +・・ ＝(π/28)tan(7π/28)
A5＝1/9 -1/19 +1/37 -1/47 +1/65 -1/75 +・・ ＝(π/28)tan(5π/28)
A6＝1/11-1/17 +1/39 -1/45 +1/67 -1/73 +・・ ＝(π/28)tan(3π/28)
A7＝1/13-1/15 +1/41 -1/43 +1/69 -1/71 +・・ ＝(π/28)tan(π/28)

上の７分身から、対角成分の A1+A7 と A2+A6 と A3+A4 は、次のようになる。

A1+A7 =C1 =1 +1/13 -1/15 -1/27 +1/29 +1/41 -1/43 -1/55 + ・・=(π/14)/sin(π/14)
A2+A6 =C2= 1/3 +1/11-1/17 -1/25 +1/31 +1/39 -1/45 -1/53 +・・=(π/14)/sin(3π/14)
A3+A4 =C3= 1/5 +1/9 -1/19 -1/23 +1/33 +1/37 -1/47 -1/51 +・・=(π/14)/sin(5π/14)

“C1 -C2 +C3”は、C1 -C2 +C3 =(1+1/7)L(1)となって本質的にL(1)になる。

＝＝

最後に。

[5]で述べたように、L(1)のパスカル固有方程式の一連の多項式関数を解にもつ微分方程式をついに発見できました。次のものです。

$(x^2+1)y' - n\{(y-1)^2+1\}=0$　(n=1,2,3,・・)　----④

例えばL(1)３分割に関しては、n=3 とした場合、$y=(x^3-3x^2-3x+1)/(x^3-3x)$ を解に持ちます。y の分子が３分割のパスカル固有方程式 $x^3-3x^2-3x+1=0$ に対応しています。なお、④は、１階の変数係数常微分方程式です。

この微分方程式の発見に４カ月もかかりました。しかし(作用素)y=(固有値)y　---⑤のような形になっておらず、その意味でまだ不満です。ちなみに、ξ(2)分割に関する“チェビシェフの微分方程式“は⑤のような理想形になっています。
④は、⑤のような理想形に変形できるはずです。なぜならＬ(1)エルミート行列の固有値問題で⑤が実現できているから。行列でできているなら微分方程式でもそうなっているはずです。『こっちの世界でそうなら、あっちの世界でもそうなっているはず』という確信から言っています。
それは、ハイゼンベルグが量子論で行列力学を建設したとき、「行列があるなら、微分方程式もあるはずだ！」とヒルベルトが主張したのと同じ精神といえます。

以上。

2019.6.30　杉岡幹生

2019.12.27 改訂(rev1.01)　中心対称行列という言葉を削除し、その周辺の説明を変更。文字フォントを変更。