＜ 三角関数と双曲線関数の融合域（その６４）＞

ゼータの香りの漂う公式の極限公式を新たに三つ見出したので下方に青色式で示す。なお、同公式は多く出すぎたため、今回のものに関係ないグループは略した。

以下で、双曲線関数 sinh, cosh, tanh はそれぞれ sh, ch, th と略記した。例えば、sh2a は sinh(2a)のことである。a は任意の実数である。$\tan^{-1}$, th^{-1} はそれぞれ arctan,arctanh である。log は自然対数、e は自然対数の底。sin, cos, tan は通常の表記である。

なお、lim での a->+0 は a をプラス側から 0 に近づける意味である。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

◆ ゼータの香りの漂う公式の極限公式

$$\frac{1}{2}-\frac{\pi\,\mathrm{ch}\,\pi}{\mathrm{sh}(2\pi)}=\frac{1}{1^2+1}-\frac{1}{2^2+1}+\frac{1}{3^2+1}-\frac{1}{4^2+1}+-\cdot\cdot$$

$$=\lim_{a\to+0} a\left(\frac{\sin a}{e^{a}+1}+\frac{\sin 2a}{e^{2a}+1}+\frac{\sin 3a}{e^{3a}+1}+\frac{\sin 4a}{e^{4a}+1}+\cdot\cdot\right)$$ ----＜S9－1＞

$$-\frac{1}{2}+\frac{(\pi/2)}{\mathrm{th}\,\pi}=\frac{1}{1^2+1}+\frac{1}{2^2+1}+\frac{1}{3^2+1}+\frac{1}{4^2+1}+\cdot\cdot$$

$$=\lim_{a\to+0} a\left(\frac{\sin a}{e^{a}-1}+\frac{\sin 2a}{e^{2a}-1}+\frac{\sin 3a}{e^{3a}-1}+\frac{\sin 4a}{e^{4a}-1}+\cdot\cdot\right)$$ ----＜S9－2＞

$$\frac{1}{2}-\frac{\pi\,\mathrm{ch}\,\pi}{\mathrm{sh}(2\pi)}=\frac{1}{1^2+1}-\frac{1}{2^2+1}+\frac{1}{3^2+1}-\frac{1}{4^2+1}+-\cdot\cdot$$

$$=\lim_{a\to+0} 2a\left(\frac{\sin a}{e^{a}+1}+\frac{\sin 3a}{e^{3a}+1}+\frac{\sin 5a}{e^{5a}+1}+\frac{\sin 7a}{e^{7a}+1}+\cdot\cdot\right)$$ ----＜S9－3＞

$$-\frac{1}{2}+\frac{(\pi/2)}{\mathrm{th}\,\pi}=\frac{1}{1^2+1}+\frac{1}{2^2+1}+\frac{1}{3^2+1}+\frac{1}{4^2+1}+\cdot\cdot$$

$$=\lim_{a\to+0} 2a\left(\frac{\sin a}{e^{a}-1}+\frac{\sin 3a}{e^{3a}-1}+\frac{\sin 5a}{e^{5a}-1}+\frac{\sin 7a}{e^{7a}-1}+\cdot\cdot\right)$$ ----＜S9－4＞

$$\frac{1}{1^2+1}-\frac{2}{2^2+1}+\frac{3}{3^2+1}-\frac{4}{4^2+1}+-\cdot\cdot$$

$$=\lim_{a\to+0} 2a\left(\frac{\cos a}{e^{a}+1}+\frac{\cos 3a}{e^{3a}+1}+\frac{\cos 5a}{e^{5a}+1}+\frac{\cos 7a}{e^{7a}+1}+\cdot\cdot\right) \qquad \text{----}\langle S9-5\rangle$$

$$\frac{1}{1^2+1}-\frac{2}{2^2+1}+\frac{3}{3^2+1}-\frac{4}{4^2+1}+-\cdot\cdot$$

$$=\lim_{a\to+0} a\left(\frac{\cos a}{e^{a}+1}+\frac{\cos 2a}{e^{2a}+1}+\frac{\cos 3a}{e^{3a}+1}+\frac{\cos 4a}{e^{4a}+1}+\cdot\cdot\right) \qquad \text{----}\langle S9-6\rangle$$

$$\frac{(\pi/2)^2 \mathrm{ch}(\pi/2)}{\mathrm{sh}^2(\pi/2)}-\frac{(\pi/2)}{\mathrm{sh}(\pi/2)}=4\left(\frac{2^2}{(2^2+1)^2}-\frac{4^2}{(4^2+1)^2}+\frac{6^2}{(6^2+1)^2}-\frac{8^2}{(8^2+1)^2}+-\cdot\cdot\right)$$

$$=\lim_{a\to+0} a^2\left(\frac{\sin a}{\mathrm{ch}^2 a}+\frac{2\sin 2a}{\mathrm{ch}^2 2a}+\frac{3\sin 3a}{\mathrm{ch}^2 3a}+\frac{4\sin 4a}{\mathrm{ch}^2 4a}+\cdot\cdot\right) \qquad \text{---}\langle S9-7\rangle$$

$$\frac{(\pi/2)}{\mathrm{th}(\pi/2)}-\frac{(\pi/2)^2}{\mathrm{sh}^2(\pi/2)}=4\left(\frac{2^2}{(2^2+1)^2}+\frac{4^2}{(4^2+1)^2}+\frac{6^2}{(6^2+1)^2}+\frac{8^2}{(8^2+1)^2}+\cdot\cdot\right)$$

$$=\lim_{a\to+0} a^2\left(\frac{\sin a}{\mathrm{sh}^2 a}+\frac{2\sin 2a}{\mathrm{sh}^2 2a}+\frac{3\sin 3a}{\mathrm{sh}^2 3a}+\frac{4\sin 4a}{\mathrm{sh}^2 4a}+\cdot\cdot\right) \qquad \text{---}\langle S9-8\rangle$$

$$\left(\frac{\pi}{2}\right)\frac{\mathrm{sh}(3\pi/2)-\mathrm{sh}(\pi/2)}{\mathrm{sh}(2\pi)}=\frac{1}{1^2+1}-\frac{3}{3^2+1}+\frac{5}{5^2+1}-\frac{7}{7^2+1}+-\cdot\cdot$$

$$=\lim_{a\to+0} a\left(\frac{\cos a}{\mathrm{ch}a}+\frac{\cos 3a}{\mathrm{ch}3a}+\frac{\cos 5a}{\mathrm{ch}5a}+\frac{\cos 7a}{\mathrm{ch}7a}+\cdot\cdot\right) \qquad \text{--}\langle S9-9\rangle$$

$$\frac{1}{1^2+1}-\frac{1}{3^2+1}+\frac{1}{5^2+1}-\frac{1}{7^2+1}+-\cdot\cdot$$

$$=\lim_{a\to\pm0} a\left(\frac{\sin a}{\mathrm{ch}a}+\frac{\sin 3a}{\mathrm{ch}3a}+\frac{\sin 5a}{\mathrm{ch}5a}+\frac{\sin 7a}{\mathrm{ch}7a}+\cdot\cdot\right) \qquad \text{--}\langle S9-10\rangle$$

$$\left(\frac{\pi}{2}\right)\frac{\mathrm{sh}(3\pi/2)-\mathrm{sh}(\pi/2)}{\mathrm{sh}(2\pi)}=\frac{1}{1^2+1}-\frac{3}{3^2+1}+\frac{5}{5^2+1}-\frac{7}{7^2+1}+-\cdot\cdot$$

$$=\lim_{a\to+0} a\left(\frac{\mathrm{sh}2a\cdot\sin a}{\mathrm{ch}4a+\cos 2a}+\frac{\mathrm{sh}3a\cdot\sin 2a}{\mathrm{ch}6a+\cos 2a}+\frac{\mathrm{sh}4a\cdot\sin 3a}{\mathrm{ch}8a+\cos 2a}+\frac{\mathrm{sh}5a\cdot\sin 4a}{\mathrm{ch}10a+\cos 2a}+\cdot\cdot\right) \text{--}\langle S9-11\rangle$$

$$\left(\frac{\pi}{2}\right)\frac{\mathrm{sh}(3\pi/2)-\mathrm{sh}(\pi/2)}{\mathrm{sh}(2\pi)}=\frac{1}{1^2+1}-\frac{3}{3^2+1}+\frac{5}{5^2+1}-\frac{7}{7^2+1}+-\cdot\cdot$$

$$=\lim_{a\to+0} a\left(\frac{\mathrm{sh}2a\cdot\sin a}{\mathrm{ch}4a+\mathrm{ch}2a}+\frac{\mathrm{sh}3a\cdot\sin 2a}{\mathrm{ch}6a+\mathrm{ch}2a}+\frac{\mathrm{sh}4a\cdot\sin 3a}{\mathrm{ch}8a+\mathrm{ch}2a}+\frac{\mathrm{sh}5a\cdot\sin 4a}{\mathrm{ch}10a+\mathrm{ch}2a}+\cdot\cdot\right) \quad \text{---}<\mathrm{S}9-12>$$

$$\frac{1}{1^2+1}-\frac{1}{3^2+1}+\frac{1}{5^2+1}-\frac{1}{7^2+1}+-\cdot\cdot$$

$$=\lim_{a\to\pm0}\left(\sin a\cdot\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\sin a}{\mathrm{ch}a}\right)+\sin 3a\cdot\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\sin a}{\mathrm{ch}3a}\right)+\sin 5a\cdot\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\sin a}{\mathrm{ch}5a}\right)+\sin 7a\cdot\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\sin a}{\mathrm{ch}7a}\right)+\cdot\cdot\right)\text{--}<\mathrm{S}9-13>$$

$$\frac{1}{(1^2+1)^2}-\frac{2}{(2^2+1)^2}+\frac{3}{(3^2+1)^2}-\frac{4}{(4^2+1)^2}+-\cdot\cdot$$

$$=\lim_{a\to+0}\frac{a^2}{2}\left(\frac{\sin a}{e^a+1}+\frac{2\sin 2a}{e^{2a}+1}+\frac{3\sin 3a}{e^{3a}+1}+\frac{4\sin 4a}{e^{4a}+1}+\cdot\cdot\right) \quad \text{----}<\mathrm{S}9-14>$$

$$\frac{1}{(1^2+1)^2}+\frac{2}{(2^2+1)^2}+\frac{3}{(3^2+1)^2}+\frac{4}{(4^2+1)^2}+\cdot\cdot$$

$$=\lim_{a\to+0} a^2\left(\frac{\sin a}{e^a-1}+\frac{3\sin 3a}{e^{3a}-1}+\frac{5\sin 5a}{e^{5a}-1}+\frac{7\sin 7a}{e^{7a}-1}+\cdot\cdot\right) \quad \text{----}<\mathrm{S}9-15>$$

$$\frac{1\times2\times3}{(2^2+1)^2}-\frac{3\times4\times5}{(4^2+1)^2}+\frac{5\times6\times7}{(6^2+1)^2}-\frac{7\times8\times9}{(8^2+1)^2}+-\cdot\cdot$$

$$=\lim_{a\to+0}\frac{a^2}{2}\left(\frac{\cos a}{\mathrm{ch}^2a}+\frac{2\cos 2a}{\mathrm{ch}^2 2a}+\frac{3\cos 3a}{\mathrm{ch}^2 3a}+\frac{4\cos 4a}{\mathrm{ch}^2 4a}+\cdot\cdot\right) \quad \text{----}<\mathrm{S}9-16>$$

================================

今回、これらの青色式の極限公式を見出した。なお、Wolfram Alpha による数値検証でも式が成立することを確認している。

これらの式の左辺を見ると、まさにゼータの香りが漂っていることがわかるであろう。＜Ｓ９－１６＞はとても変わっているが、これもやはりゼータが香っている。

＜Ｓ９－１６＞が面白い形をしている。この＜Ｓ９－１６＞の証明の概要を以下に示す。

****

＜S9－16＞の証明

次の[基本式 2]の式から出発する。これは２年以上前にこちらで導出した二変数の母等式であり、私の中では第二系列 Cos 基本式(二変数版)に当たるものである。なお、x の条件は、前回の$-\pi\leqq x\leqq\pi$から今回の”x は任意実数”に変更した。こちらが正しい。

$$\frac{\cos x}{e^a+1}+\frac{\cos 2x}{e^{2a}+1}+\frac{\cos 3x}{e^{3a}+1}+\frac{\cos 4x}{e^{4a}+1}+\cdot\cdot$$

$$=\left\{-\frac{1}{2}+\frac{\mathrm{sh}a}{2(\mathrm{ch}a-\cos x)}\right\}-\left\{-\frac{1}{2}+\frac{\mathrm{sh}2a}{2(\mathrm{ch}2a-\cos x)}\right\}+\left\{-\frac{1}{2}+\frac{\mathrm{sh}3a}{2(\mathrm{ch}3a-\cos x)}\right\}-\left\{-\frac{1}{2}+\frac{\mathrm{sh}4a}{2(\mathrm{ch}4a-\cos x)}\right\}+-\cdot\cdot \quad \text{--[基本式 2]}$$

(x は任意実数, a > 0)

上式を a で微分すると、次となる。

$$\frac{\cos x}{\mathrm{ch}^2 a}+\frac{2\cos 2x}{\mathrm{ch}^2 2a}+\frac{3\cos 3x}{\mathrm{ch}^2 3a}+\frac{4\cos 4x}{\mathrm{ch}^2 4a}+\cdot\cdot$$

$$=2\left(\frac{\mathrm{ch}2a\cdot\cos x-1}{(\mathrm{ch}2a-\cos x)^2}-\frac{2(\mathrm{ch}4a\cdot\cos x-1)}{(\mathrm{ch}4a-\cos x)^2}+\frac{3(\mathrm{ch}6a\cdot\cos x-1)}{(\mathrm{ch}6a-\cos x)^2}-\frac{4(\mathrm{ch}8a\cdot\cos x-1)}{(\mathrm{ch}8a-\cos x)^2}+-\cdot\cdot\right) \quad \text{---[1]}$$

(a > 0)

上式で、x を a と置いて次となる。

$$\frac{\cos a}{\mathrm{ch}^2 a}+\frac{2\cos 2a}{\mathrm{ch}^2 2a}+\frac{3\cos 3a}{\mathrm{ch}^2 3a}+\frac{4\cos 4a}{\mathrm{ch}^2 4a}+\cdot\cdot$$

$$=2\left(\frac{\mathrm{ch}2a\cdot\cos a-1}{(\mathrm{ch}2a-\cos a)^2}-\frac{2(\mathrm{ch}4a\cdot\cos a-1)}{(\mathrm{ch}4a-\cos a)^2}+\frac{3(\mathrm{ch}6a\cdot\cos a-1)}{(\mathrm{ch}6a-\cos a)^2}-\frac{4(\mathrm{ch}8a\cdot\cos a-1)}{(\mathrm{ch}8a-\cos a)^2}+-\cdot\cdot\right) \quad \text{---[2]}$$

(a > 0)

この両辺に a^2 を掛けて（右辺は各項に掛ける）、a を 0 に近づけていくと右辺はロピタルの定理から最終的に

$$2\left(\frac{1\times2\times3}{(2^2+1)^2}-\frac{3\times4\times5}{(4^2+1)^2}+\frac{5\times6\times7}{(6^2+1)^2}-\frac{7\times8\times9}{(8^2+1)^2}+-\cdot\cdot\right)$$

となり、最後に左辺と右辺を入れ替えて、形を整理して目的の＜Ｓ９－１６＞に到達した。

$$\frac{1\times2\times3}{(2^2+1)^2}-\frac{3\times4\times5}{(4^2+1)^2}+\frac{5\times6\times7}{(6^2+1)^2}-\frac{7\times8\times9}{(8^2+1)^2}+-\cdot\cdot$$

$$=\lim_{a\to+0}\frac{a^2}{2}\left(\frac{\cos a}{\mathrm{ch}^2 a}+\frac{2\cos 2a}{\mathrm{ch}^2 2a}+\frac{3\cos 3a}{\mathrm{ch}^2 3a}+\frac{4\cos 4a}{\mathrm{ch}^2 4a}+\cdot\cdot\right) \quad \text{----<S9-16>}$$

終わり。

****

このようにして＜Ｓ９－１６＞は得られた。証明のポイントは、これまでと同様、[2]の両辺にわざわざ a^2 を掛ける（右辺は各項に掛ける）点にある。さらに、x を a と置いた簡単な操作の裏には数理哲学的に極めて奥深い操作が絡んでいることもこれまで述べてきた通りである。

最後に、気になる点や想うことなど述べておく。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

●＜Ｓ９－１２＞と今回の三式を並べよう。

$$\left(\frac{\pi}{2}\right)\frac{\mathrm{sh}(3\pi/2)-\mathrm{sh}(\pi/2)}{\mathrm{sh}(2\pi)}=\frac{1}{1^2+1}-\frac{3}{3^2+1}+\frac{5}{5^2+1}-\frac{7}{7^2+1}+-\cdot\cdot$$

$$=\lim_{a\to+0} a\left(\frac{\mathrm{sh}2a\cdot\sin a}{\mathrm{ch}4a+\mathrm{ch}2a}+\frac{\mathrm{sh}3a\cdot\sin 2a}{\mathrm{ch}6a+\mathrm{ch}2a}+\frac{\mathrm{sh}4a\cdot\sin 3a}{\mathrm{ch}8a+\mathrm{ch}2a}+\frac{\mathrm{sh}5a\cdot\sin 4a}{\mathrm{ch}10a+\mathrm{ch}2a}+\cdot\cdot\right) \quad \text{---<S9-12>}$$

$$\frac{1}{(1^2+1)^2}-\frac{2}{(2^2+1)^2}+\frac{3}{(3^2+1)^2}-\frac{4}{(4^2+1)^2}+-\cdot\cdot$$

$$=\lim_{a\to+0}\frac{a^2}{2}\left(\frac{\sin a}{e^a+1}+\frac{2\sin 2a}{e^{2a}+1}+\frac{3\sin 3a}{e^{3a}+1}+\frac{4\sin 4a}{e^{4a}+1}+\cdot\cdot\right) \quad \text{----<S9-14>}$$

$$\frac{1}{(1^2+1)^2}+\frac{2}{(2^2+1)^2}+\frac{3}{(3^2+1)^2}+\frac{4}{(4^2+1)^2}+\cdot\cdot$$

$$=\lim_{a\to+0} a^2\left(\frac{\sin a}{e^a-1}+\frac{3\sin 3a}{e^{3a}-1}+\frac{5\sin 5a}{e^{5a}-1}+\frac{7\sin 7a}{e^{7a}-1}+\cdot\cdot\right) \quad \text{----<S9-15>}$$

$$\frac{1\times2\times3}{(2^2+1)^2}-\frac{3\times4\times5}{(4^2+1)^2}+\frac{5\times6\times7}{(6^2+1)^2}-\frac{7\times8\times9}{(8^2+1)^2}+-\cdot\cdot$$

$$=\lim_{a\to+0}\frac{a^2}{2}\left(\frac{\cos a}{\mathrm{ch}^2 a}+\frac{2\cos 2a}{\mathrm{ch}^2 2a}+\frac{3\cos 3a}{\mathrm{ch}^2 3a}+\frac{4\cos 4a}{\mathrm{ch}^2 4a}+\cdot\cdot\right) \quad \text{----<S9-16>}$$

私の考えでは、＜Ｓ９－１４＞と＜Ｓ９－１５＞は絶対に明示的な特殊値は求まらない！
その理由を述べるのは紙数を要するが、簡単にいえば、もし＜Ｓ９－１４＞左辺や＜Ｓ９－１５＞左辺の級数が明示的な特殊値をもったならば、ζ(3)の奇数ゼータが明示的な特殊値をもってしまうことになり、とてもおかしなことになるからである。昔、開発したテイラーシステムからそんなことにならないことはほぼわかっている。

ただし、＜Ｓ９－１６＞左辺に限っては、もしかしたら明示的な特殊値をもつかもしれない・・とも思っている。級数の形が特殊なのでよくわからない。

はたして＜Ｓ９－１６＞左辺は、＜Ｓ９－１２＞のような特殊値をもつのだろうか？
持つのか？持たないのか？現時点では不明。公式集にも＜Ｓ９－１６＞左辺の級数は載っていない。

●この１年、極限公式を数多く見出してきたが、その導出の過程を冷静に振り返れば、ひらすら恒等式の持つ特異点を（疑似的に）解消してきた作業であったとはたと気づいた。例えば、今回の証明では、[2]の右辺に存在する a=0 という特異点を解消しているのである。

過去に見出してきた恒等式の中で、よい形の特異点をもつ式はそれほど多くなく全体の 1/5 ほどの割合に過ぎない。ただし、いろいろなパターンがあって、証明中の[1]からは x=0 として log2 極限公式も出るし、また[2]を経由して今回の導出のように＜Ｓ９－１６＞という面白い公式も得られるというふうに状況は千変万化という感じである。もちろん、その千変万化は証明中の[基本式 2]から生まれている。

$$\frac{\cos x}{e^a+1}+\frac{\cos 2x}{e^{2a}+1}+\frac{\cos 3x}{e^{3a}+1}+\frac{\cos 4x}{e^{4a}+1}+\cdot\cdot$$

$$=\left\{-\frac{1}{2}+\frac{\mathrm{sh}a}{2(\mathrm{ch}a-\cos x)}\right\}-\left\{-\frac{1}{2}+\frac{\mathrm{sh}3a}{2(\mathrm{ch}2a-\cos x)}\right\}+\left\{-\frac{1}{2}+\frac{\mathrm{sh}3a}{2(\mathrm{ch}3a-\cos x)}\right\}-\left\{-\frac{1}{2}+\frac{\mathrm{sh}4a}{2(\mathrm{ch}4a-\cos x)}\right\}+-\cdot\cdot \quad \text{--[基本式 2]}$$

$$(x\text{ は任意実数},\ a>0)$$

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

2026.1.31 杉岡幹生
sugioka_m@mvb.biglobe.ne.jp

＜参考文献＞

・「マグロウヒル　数学公式・数表ハンドブック」(Murray R. Spiegel 著、氏家勝巳訳、オーム社)
・「数学公式Ⅱ」(森口・宇田川・一松、岩波書店)