【P676】4月3日(日) 球面3角形の面積

● 球面3角形の面積

当文書の主題,通奏低音はSimplexです。でも、Simplexとは一見無関係と思われる話題が続きました。Mittag-Lefflerの定理,Wierstrassの定理,Gamma Functionに関する議論などです。

このへんで、Simplexに関するささやかな話題について論じましょう。実は、前節で論じたn次元単位球の体積もSimplexと無関係ではありません。但し、平面(超平面)上のSimplexではなく球面(超球面)上のSimplexです。

半径rのn次元球の体積$V_n(r)$とn次元単位球の体積$v(n)$との関係,$v(z)$と$\Gamma(z)$との関係を思い出しましょう。

半径rのn次元球の超表面の面積を${}_{ph}S_{n-1}(r)$と記すことにしましょう。明らかに、$V_n(r)$をrで微分すれば${}_{ph}S_{n-1}(r)$が得られます。つまり

$$ {}_{ph}S_{n-1}(r) = \frac{d}{dr}V_n(r) \qquad \text{(W1)} $$

従って、(219),(234)より

$$ {}_{ph}S_{n-1}(r) = \frac{d}{dr}\left(v(n)r^n\right) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} n r^{n-1} \qquad \text{(W2)} $$

これを定理として再記しておきます。

n次元球体の表面積

半径rのn次元球体のn-1次元超表面の面積を${}_{ph}S_{n-1}(r)$とすれば

$$ {}_{ph}S_{n-1}(r) = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} r^{n-1} \qquad \text{定理(244)} $$

余談になりますが、定理(244)に $r=1$, $n=1$ を代入すると、

$${}_{ph}S_{0}(1) = 2 \qquad (W3)$$

が得られます。これは自然な解析接続に過ぎません。解析幾何学的に有意だと解釈するならば、この式が意味しているのは、1次元単位球，つまり長さ2の線分の表面、つまり2つの端点の面積，つまり2点の0次元体積が2であるということです。このことは、0次元単位球の体積 $v(0)$ が1であるとする前節の結果とつじつまが合っています。ただ1点だけからなる集合の0次元体積は1だということです。この解釈が物理学に対して何らかの影響を与えるとしたらそれは何なのでしょうか？ 電子を考えてみましょう。今のところ電子は3次元的な広がりをもたないとされています。にもかかわらず、0でない質量 m_e をもちます。それならばその質量分布は Dirac の Delta Function $\delta(x)$ で表わす必要があるのでしょうか？ そうだとするならば、裸の特異点を認めることになりますが、自然は裸の特異点を嫌います。Black Hole の特異点は事象の地平面で隠されています。電子の質量のよすが（手がかり）を1点の0次元体積が1（0ではない）という事実に求めることが出来るかも知れません。現代の物理学では、くり込み理論で、電子の周りの電磁場の Energy に質量のよすがを求めているはずですが、くり込み理論は $\infty - \infty$ を用いるなど、数学的な本質がまだ明らかではないと思われます。以上、余談でした。

平面3角形の面積については既に十分議論しましたが、球面3角形の面積についてはまだ論じていませんね。当節の主題は球面3角形の面積です。球面3角形の面積は面白いことに平面3角形の面積を与える Heron の公式とは全く関係なく、内角の和が π であ

るという事実と関係しています。このことは、平面3角形は限りなく小さい（無限小の）球面3角形と見做せるという事実と関係します。

(244)に $r=1,\ n=3$ を代入すると、

3次元単位球体の表面積

$${}_{ph}S_2(1) = 4\pi \qquad \text{定理(245)}$$

これは当文書の読者ならば誰でも知っている命題ですね。でも僕は、これを最初に学んだのが、中学生の頃だったのかそれとも高校生の頃だったのか思い出すことが出来ません。中学生の頃だったとしたら単に暗記させられた筈です。また高校生の頃だったとしたら微積分の応用例として導出したと思われます。貴方は覚えていますか？

定理(245)は、これから呈示する命題と共に、球面3角形の面積を求めるのに重要な働きをする命題の1つです。

お願いがあります（I wish you…）。これから僕が論じようとしている内容に進む前に是非、『球面3角形の定義』の節を復習（Review）していただきたいのです。出来たら『極射影』の節もお願いします。僕自身、これらの節を（自分で書いたにもかかわず）再読する（Reread）必要がありました。僕の記憶力（Memory）はその程度だということです。でも、貴方の記憶力を疑っている訳ではありません。悪しからず。それだけ当節が、上記の2つの節に依存しているということです。

『球面3角形の定義』では仄めかしから始めました。幾つもの球面3角形の絵を仄めかしのために説明無しで描きました。そして球面3角形を病的な球面3角形と健全な球面3角形に分類

し、病的な球面3角形から吟味しま(Investigate)した。

その結果として、病的な球面3角形を下記の4つのCategory

多重的， 縮退的， 対極的，半球的

の組み合せによってさらに分類しました。

当節で注目するのは対極的球面3角形です。対極的球面3角形は、幾何学的には球面2角形(球面2辺形)そのものです。その2つの頂点は互いに対極的関係にあります。一方を北極と見做せば他方は南極と見做せます。またその2つの辺は単位球面上の測地線、つまり大円弧であり、子午線(Meridian)と見做せます。その長さはどちらもπです。2つの頂点の内角は等しく、それをθとおけば、$0 \leqq \theta \leqq \pi$です。

次が成り立ちます。

球面2角形の面積

$0 \leqq \theta \leqq \pi$

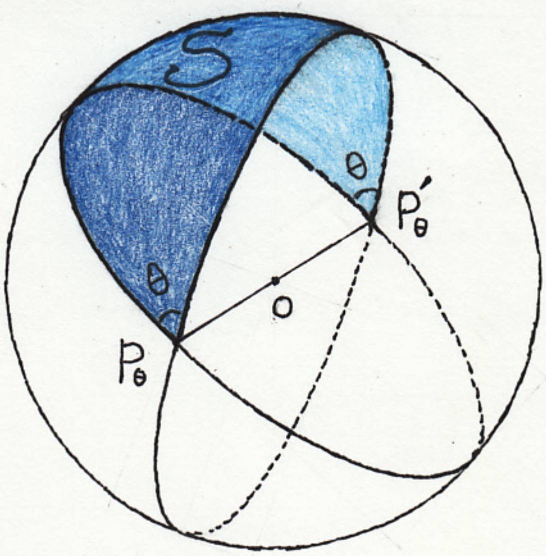

fig.305

内角がθの球面2角形の面積をSとおけば

$$S = 2\theta$$

定理(246)

球面3角形の面積（続き）

ほとんど自明ですが一応証明（？）しましょう。$\theta=\pi$ のときは球面2角形は半球（Hemisphere）になりますから、その面積は $\frac{1}{2}\cdot 4\pi = 2\pi$ です。また、Sは θ に比例します。（このことは、直観的には明らかですが、証明しようとするならばちょっと長くなるので省略します。Hintだけ示すならば、半球を無限個に等分割するということです。）この2つの事実から $S=2\theta$ が得られます。〃

（245），（246）を用いることで、球面3角形の面積が得られます。

球面3角形の面積

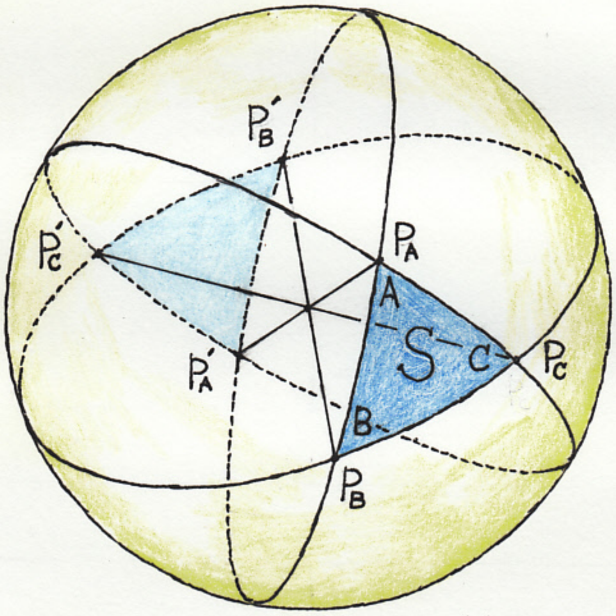

fig.306

頂点 P_A, P_B, P_C の内角がそれぞれ A, B, C なる球面3角形 $P_AP_BP_C$ の面積を S とおけば

$$S = A + B + C - \pi$$ 定理（247）

証明します。fig.306 の球面3角形 $P_A'P_B'P_C'$ は球面3角形

【P681】4月6日(水) 球面3角形の面積(続き)

$P_AP_BP_C$と合同ですから、その面積もSです。球面3角形$P_AP_BP_C$の辺を形作る(Shape)3つの大円は球面を8個の球面3角形に分割します。それらは互いに合同な4対の球面3角形から成ります。$P_AP_BP_C$と$P_A'P_B'P_C'$はその中の1対です。定理(247)を証明するためには、これら4対の全ての球面3角形を考慮する必要があるのですが、単位球面を平面に正射影したfig.306は、球面の裏表が重なって見えるので非常に分りにくいですね。そこで、極射影した射影平面上の図形を用いて考察することにしましょう。『極射影』では、射影球面上の点Pを射影平面へ極射影した点の識別子として$\tilde{P}$を用いましたが、ここでは同じ識別子Pを用いることにします。その意図は、射影平面を通じて射影球面上の図形そのものを見ていると思ってもらいたいからです。射影平面を単なる鏡だと思ってほしいのです。

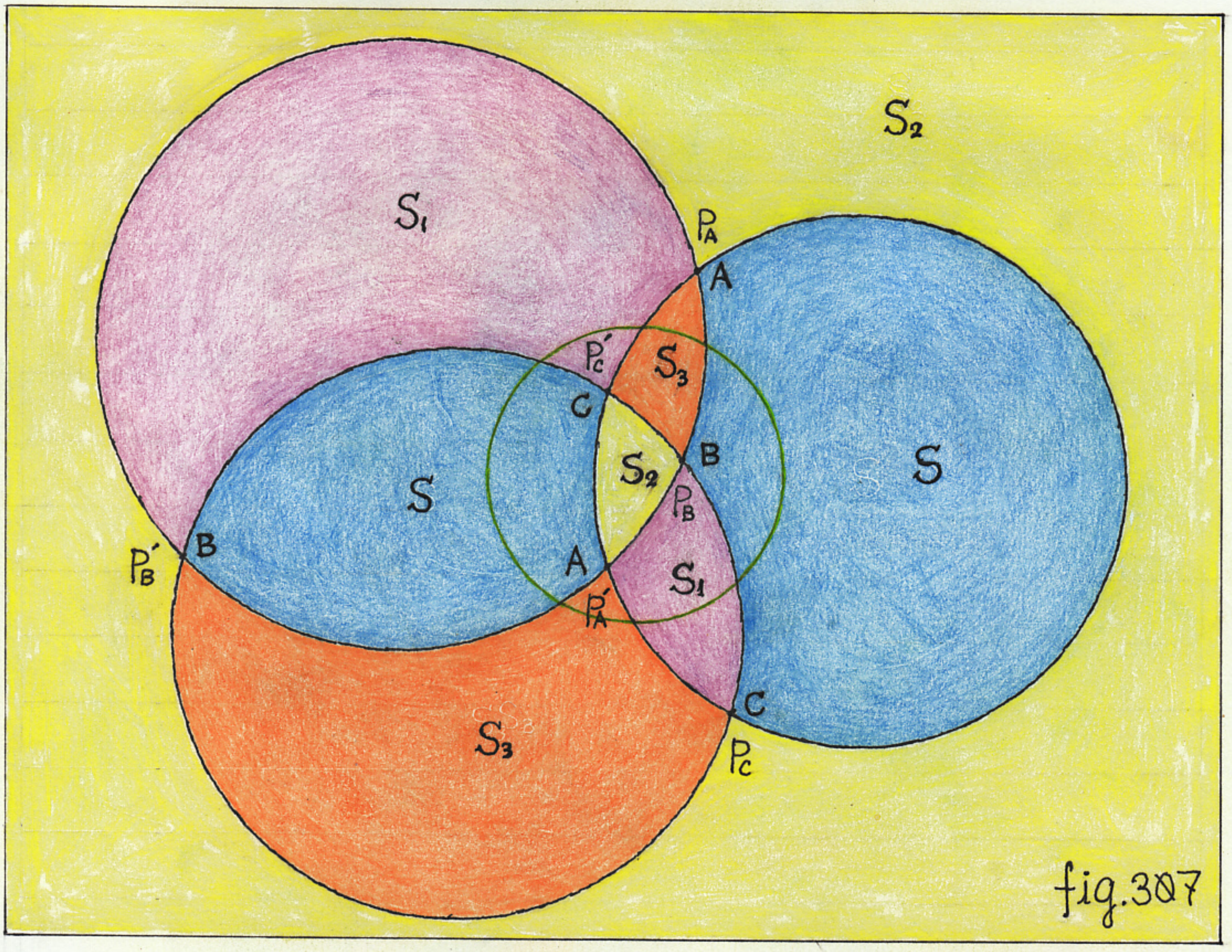

fig.307

【P682】球面3角形の面積（続き）

(245),(246),及びfig.307より、

球面全体の面積 = $2S+2S_1+2S_2+2S_3=4\pi$ .0)

内角が$\pi-A$の球面2角形P_AP_A'の面積 = $S_2+S_3=2(\pi-A)$ .1)

内角がB　の球面2角形P_BP_B'の面積 = $S+S_2=2B$ .2)

内角が$\pi-C$の球面2角形P_CP_C'の面積 = $S_1+S_2=2(\pi-C)$ .3)

(W4)

連立方程式(W4)を解けば(247)が得られます。 Q.E.D.

面積が角度そのものだけで表現されるというのは面白いというか、ちょっと不思議な気分にさせられます。

今回は2次元球面上の3角形の面積に限った議論でしたが、一般のn次元に対して、$n-1$次元超球面上の$n-1$次元単体、$n-1$ Dimensional Spherical Simplexの場合はどうなるのでしょうか？ やはりその場合の面積($n-1$次元体積)もまた、何らかの角度量そのもので表現されるのでしょうか？ その前に、$n-1$次元球面単体の定義の問題もあります。それだけではなく、やはり興味深い課題として、$n-1$次元単位球面と$n-1$次元平面間の極射影なる写像の定義とそれが満たす性質(保xxx性など)の探究もあります。n次元平面単体法，n次元球面単体法もあります。

Simplexは僕を、そして貴方を待っています。

● 小休止：Hierarchy [háiəràərki]

1	Seraphim *pl.*	sérəfim	熾天使
2	Cherubim	tʃérəbim	智天使
3	Thrones	θróunz	座天使
4	Dominations	dàmənéiʃənz	主天使
5	Virtues	vé:rtʃu:z	力天使
6	Powers	páuərz	能天使
7	Principalities	prinsəpǽləti:z	権天使
8	Archangels	áərk-èindʒəlz	大天使
9	Angels	éindʒəlz	天使

?	6	Demon	dí:man	悪魔
?	10	Fallen Angl		堕天使

fig.308

brāhmana	婆羅門
Ksatriya	刹帝利
Vaiśya	吠舎
śūdra	首陀羅

fig.309

Samurai	武士
Farmer	農民
Craftsman	職人
Merchant	商人

fig.310