【P633】 Gamma Function $\Gamma(z)$ （続き）

まず、(212) から難なく（Easily）得られる等式たちを呈示し証明しましょう。

> **定義から容易に得られる $\Gamma(z)$ に関する公式**
>
> $$\Gamma(1) = 1 \qquad .1)$$
>
> $$\Gamma(z) = 2\int_0^\infty e^{-t^2} t^{2z-1} dt, \quad \mathcal{R}(z) > 0 \qquad .2)$$
>
> $$\Gamma(z) = \int_0^1 \left[\log\left(\frac{1}{t}\right)\right]^{z-1} dt, \quad \mathcal{R}(z) > 0 \qquad .3)$$
>
> $$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots\cdots n}{z(z+1)(z+2)\cdots\cdots(z+n)} n^z \qquad .4)$$
>
> $$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \qquad .5)$$
>
> $$\Gamma(n+1) = n! \quad (n = 0, 1, 2, 3, \cdots\cdots) \qquad .6)$$
>
> 定理(213)

.4) も Euler's Form と呼ばれています。.4) により $\Gamma(z)$ は全複素平面に渡って定義されたことになります。$\Gamma(z)$ は .6) を満たすことから、階乗関数（Factorial Function）とも呼ばれています。

(213) の各式を順に証明しましょう。

.1) を示します。

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = \left[-e^{-t}\right]_0^\infty = 0 - (-1) = 1 \quad /\!/$$

.2)を示します。積分変数tを下記のτに変換します。

$$t = \tau^2, \quad dt = 2\tau d\tau$$

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt = \int_0^\infty e^{-\tau^2} (\tau^2)^{z-1} (2\tau d\tau)$$

$$= 2\int_0^\infty e^{-\tau^2} \tau^{2z-1} d\tau, \quad \Re(z) > 0 \quad //$$

.3)を示します。積分変数を変換します。

$$t = \log\left(\frac{1}{\tau}\right), \quad e^t = \frac{1}{\tau}, \quad e^{-t} = \tau$$

$$dt = \frac{1}{\frac{1}{\tau}} \cdot \frac{-1}{\tau^2} d\tau = -\frac{1}{\tau} d\tau$$

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt = \int_1^0 \tau \left[\log\left(\frac{1}{\tau}\right)\right]^{z-1} \left(-\frac{1}{\tau} d\tau\right)$$

$$= \int_0^1 \left[\log\left(\frac{1}{\tau}\right)\right]^{z-1} d\tau, \quad \Re(z) > 0 \quad //$$

(213.4)を証明しましょう。ちょっと長くなります。定義(212)の右辺の被積分関数中のe^{-t}に注目しましょう。指数関数の定義より、

$$e^{-t} = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \tag{W1}$$

そこで、正整数nに対して、$F(z,n)$を次式で定義します。

$$F(z,n) = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1} dt, \quad \Re(z) > 0 \tag{W2}$$

【P635】 Gamma Function $\Gamma(z)$ （続き）

(212), (W1), (W2)より

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} F(z,n) \qquad \text{(W3)}$$

(W2)の右辺の積分は、$t = n\tau$とおけば

$$F(z,n) = \int_0^1 (1-\tau)^n (n\tau)^{z-1} (n\,d\tau)$$

$$F(z,n) = n^z \int_0^1 (1-\tau)^n \tau^{z-1} d\tau, \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \qquad \text{(W4)}$$

ここでさらに、$G(z,n)$を次式で定義します。

$$G(z,n) = \int_0^1 (1-t)^n t^{z-1} dt, \qquad \Re(z) > 0 \qquad \text{(W5)}$$

(W4), (W5)より

$$F(z,n) = n^z G(z,n), \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots) \qquad \text{(W6)}$$

(W5)の$G(z,n)$は、部分積分すれば

$$G(z,n) = \left[(1-t)^n \frac{t^z}{z} \right]_0^1 + \frac{n}{z} \int_0^1 (1-t)^{n-1} t^z dz$$

この式の右辺オ1項は正整数nに対して0です。またオ2項の積分は$G(\cdot,\cdot)$の形式を成しています。つまり

$$G(z,n) = \frac{n}{z} G(z+1, n-1), \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \qquad \text{(W7)}$$

【P636】3月2日(水) Gamma Function $\Gamma(z)$ （続き）

(W7)を繰り返し適用すると

$$G(z,n) = \frac{n}{z}\cdot\frac{n-1}{z+1}\cdot\frac{n-2}{z+2}\cdots\cdots\frac{n-(n-1)}{z+(n-1)}\cdot G(z+n,0) \qquad (W8)$$

また

$$G(z+n,0) = \int_0^1 (1-t)^0\, t^{z+n-1}dt = \left[\frac{t^{z+n}}{z+n}\right]_0^1 = \frac{1}{z+n} \qquad (W9)$$

(W8), (W9)より

$$G(z,n) = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots\cdots n}{z(z+1)(z+2)(z+3)\cdots\cdots(z+n)} \qquad (W10)$$

(W3), (W6), (W10)より

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots\cdots n}{z(z+1)(z+2)\cdots\cdots(z+n)}n^z \quad //$$

.5)を示します。証明済の .4)において、$z \to z+1$ とおくと

$$\Gamma(z+1) = \lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots\cdots n}{(z+1)(z+2)(z+3)\cdots\cdots(z+n)(z+n+1)}n^{z+1}$$

$$= \left(\lim_{n\to\infty}\frac{nz}{z+n+1}\right)\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots\cdots n}{z(z+1)(z+2)\cdots\cdots(z+n)}n^z\right)$$

$$= z\Gamma(z) \quad //$$

.5)は定義式(212)から直接導くこともできます。やってみましょう。

$$\Gamma(z+1) = \int_0^\infty e^{-t}t^z dt$$

【P637】 Gamma Function $\Gamma(z)$ （続き）

$$\Gamma(z+1) = \left[-e^{-t}t^{z}\right]_{0}^{\infty} + z\int_{0}^{\infty} e^{-t}t^{z-1}dt = z\Gamma(z) \quad 〃$$

.6）を示します。.1）より、$\Gamma(1) = 1 = 0!$ です。 $0! = 1$ は $n!$ の定義の一部です。$n \geqq 1$ の場合は、.5）を操り返し適用します。

$$\begin{aligned}\Gamma(n+1) &= n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1)\\ &= n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots 2\cdot 1\cdot\Gamma(1) = n! \quad 〃\end{aligned}$$

Q.E.D.

次式が成り立ちます。

$\Gamma(z)$ の Weierstrass' Form

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z e^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{z}{n}\right)\exp\left(-\frac{z}{n}\right)\right] \qquad .1)$$

ここで γ は、Euler-Mascheroni Constant と呼ばれる定数で

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n\right) \qquad .2)$$

僕の持っている本『Mathematics by Experiment』によると

$$\gamma = 0.577\,215\,664\,901\,532\,860\,61\cdots\cdots \qquad .3)$$

定理（214）

γ は単に Euler Constant とも呼ばれています。γ は超越数だと予想されていますが、まだ証明されていないはずです。

(214)を導出します。Weierstrass Factor Theorem (210.2)を用いたいところですが、今はそういう訳にはいきません。$1/\Gamma(z+1)$の微分、つまるところ、$\Gamma(z)$自身の微分$\Gamma'(z)$についてはまだ何も示されていない(未考察だ)からです。

(213.4)を変形します。

$$\frac{1}{z\Gamma(z)} = \lim_{n\to\infty} \frac{(z+1)(z+2)(z+3)\cdots\cdots(z+n)}{1\cdot2\cdot3\cdot\cdots\cdot n}\cdot\frac{1}{n^z}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\left(\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{z+k}{k}\right)\right)n^{-z}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[n^{-z}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{z}{k}\right)\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\exp(-z\log n)\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{z}{k}\right)\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\exp(-z\log n)\cdot\frac{\prod_{k=1}^{n}\exp\left(\frac{z}{k}\right)}{\prod_{k=1}^{n}\exp\left(\frac{z}{k}\right)}\cdot\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{z}{k}\right)\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\exp(-z\log n)\exp\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{z}{k}\right)\cdot\prod_{k=1}^{n}\left[\exp\left(-\frac{z}{k}\right)\left(1+\frac{z}{k}\right)\right]\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\exp\left[\left(-\log n+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)z\right]\prod_{k=1}^{n}\left[\left(1+\frac{z}{k}\right)\exp\left(-\frac{z}{k}\right)\right]\right]$$

$$= e^{\gamma z}\prod_{n=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{z}{n}\right)\exp\left(-\frac{z}{n}\right)\right] \quad //$$

Q.E.D.

Gamma Function $\Gamma(z)$ （続き）

次式が成り立ちます。

$\Gamma(z)$の相補定理

$$\frac{1}{\Gamma(z)\Gamma(-z)} = -\frac{1}{\pi} z \sin \pi z \qquad .1)$$

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z} \qquad .2)$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \qquad .3)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi} \qquad .4)$$

定理(215)

.2)を$\Gamma(z)$の相補定理（Complementary Theorem？）と呼ぶ人もいるそうです。.4)はGauss分布の正規化の定数を与えてくれます。.2)はまた、相反公式（Reflection Formula）と呼ばれることもあります。

.1)を示します。Weierstrass' Form (214.1)より

$$\frac{1}{\Gamma(z)}\cdot\frac{1}{\Gamma(-z)} = (+z)e^{+\gamma z}\prod_{n=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{z}{n}\right)\exp\left(-\frac{z}{n}\right)\right]$$

$$\cdot(-z)e^{-\gamma z}\prod_{n=1}^{\infty}\left[\left(1-\frac{z}{n}\right)\exp\left(+\frac{z}{n}\right)\right]$$

$$\frac{1}{\Gamma(z)\Gamma(-z)} = -z^2\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right) \qquad \text{(W11)}$$

3月4日(金) Gamma Function $\Gamma(z)$ (続き)

一方、(211.1)

$$\frac{\sin z}{z} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2\pi^2}\right)$$

において、$z \to \pi z$とおけば

$$\frac{\sin \pi z}{\pi z} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right) \qquad \text{(W12)}$$

(W11), (W12)より .1)を得ます。

.2)を示します。(213.5)において、$z \to -z$ とおけば

$$\Gamma(1-z) = -z\Gamma(-z) \qquad \text{(W13)}$$

.1), (W13)より、.2)が得られます。

.3)を示します。(213.2)において、$z = \frac{1}{2}$とおくと

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt \qquad \text{(W14)}$$

この式の右辺の積分値は正ですから、$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) > 0$ です。
一方、証明済の式 .2)において、$z = \frac{1}{2}$とおくと

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \pi$$

よって .3)が成り立ちます。

.4)は、(W14)と .3)から直ちに得られます。
.4)は、左辺の積分の2乗を直接積分することによっても得られますが、省略します。(極座標変換を用います。)　Q.E.D.

次式が成り立ちます。

Beta Function 登場

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta)^{2a-1}(\sin\theta)^{2b-1}d\theta = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)},\quad \Re(a)>0,\ \Re(b)>0 \qquad .1)$$

この右辺は Beta Function と呼ばれ、$B(a,b)$ と記します。つまり

$$B(a,b) \equiv \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} \qquad .2)$$

定理(216)

.1)を証明します。(213.2)を用います。

$$\Gamma(a)\Gamma(b) = \left(2\int_0^{\infty} e^{-x^2}x^{2a-1}dx\right)\left(2\int_0^{\infty} e^{-y^2}y^{2b-1}dy\right)$$

$$\Gamma(a)\Gamma(b) = 4\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} \exp(-x^2-y^2)\cdot x^{2a-1}y^{2b-1}dxdy \qquad (W15)$$

ここで、積分変数 x, y を、極座標 r, θ に変換します。

$$x = r\cos\theta,\quad y = r\sin\theta \qquad (W16)$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r(\cos^2\theta+\sin^2\theta) = r$$

【P642】3月5日(土) Gamma Function $\Gamma(z)$ (続き)

$$dxdy = r\,dr\,d\theta \tag{W17}$$

(W16), (W17)を(W15)に代入すれば

$$\Gamma(a)\Gamma(b) = 4\int_0^\infty\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r^2}(r\cos\theta)^{2a-1}(r\sin\theta)^{2b-1}\,r\,dr\,d\theta$$

$$= 2\left(2\int_0^\infty e^{-r^2} r^{2(a+b)-1}dr\right)\cdot\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta)^{2a-1}(\sin\theta)^{2b-1}d\theta\right)$$

$$\Gamma(a)\Gamma(b) = 2\Gamma(a+b)\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta)^{2a-1}(\sin\theta)^{2b-1}d\theta \quad /\!/$$

Q.E.D.

次式が成り立ちます。

Legendre Duplication Formula

$$\Gamma(2z) = \frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)$$

定理(217)

証明します。(216.1)を2度用います。

$$\frac{\Gamma(z)\Gamma(z)}{2\Gamma(2z)} = \int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta\sin\theta)^{2z-1}d\theta$$

 Gamma Function $\Gamma(z)$ （続き）

$$\frac{\Gamma(z)\Gamma(z)}{2\Gamma(2z)} = \frac{1}{2^{2z-1}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2\cos\theta\sin\theta)^{2z-1}d\theta$$

$$= \frac{1}{2^{2z-1}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin 2\theta)^{2z-1}d\theta$$

$$= \frac{1}{2^{2z-1}}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi}(\sin\eta)^{2z-1}d\eta$$

$$= \frac{1}{2^{2z-1}}\cdot\frac{2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\eta)^{2\cdot\frac{1}{2}-1}(\sin\eta)^{2z-1}d\eta$$

$$= \frac{1}{2^{2z-1}}\frac{1}{2}\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(z)}{\Gamma(\frac{1}{2}+z)}$$

$$\Gamma(2z) = \frac{2^{2z-1}}{\Gamma(\frac{1}{2})}\cdot\Gamma(z)\Gamma(z+\frac{1}{2})$$ Q.E.D.

実数xに対して$\Gamma(x)$を作図したいのですが、そのためには$\Gamma(\frac{1}{4})$の近似値がわかれば良いのですが….. 僕の持っている本『Mathematical Methods for Physicists by Arfken』によれば

$\Gamma(x)$の近似値 by C. Hastings

$$\Gamma(1+x) = 1 + \sum_{n=1}^{8} b_n x^n + \varepsilon(x)$$

$$|\varepsilon(x)| < 3\times 10^{-7}, \quad 0 \leqq x \leqq 1$$

$b_1 = -.577191652$ $b_2 = .988205891$ $b_3 = -.897056937$ $b_4 = .918206857$

$b_5 = -.756704078$ $b_6 = .482199394$ $b_7 = -.193527818$ $b_8 = .035868343$

定理(218)

【P644】3月7日(月) Gamma Function $\Gamma(z)$ (続き)

$\Gamma(0) = \pm\infty$	$\Gamma(0) = \pm\infty$
$\Gamma(\frac{1}{4}) = 3.6256104$	$\Gamma(-\frac{1}{4}) = -4.9016656$
$\Gamma(\frac{1}{2}) = 1.7724538$	$\Gamma(-\frac{1}{2}) = -3.5449076$
$\Gamma(\frac{3}{4}) = 1.2254164$	$\Gamma(-\frac{3}{4}) = -4.834147$
$\Gamma(1) = 1$	$\Gamma(-1) = \pm\infty$
$\Gamma(1+\frac{1}{4}) = 0.9064026$	$\Gamma(-1-\frac{1}{4}) = 3.9213324$
$\Gamma(1+\frac{1}{2}) = 0.8862269$	$\Gamma(-1-\frac{1}{2}) = 2.3632717$
$\Gamma(1+\frac{3}{4}) = 0.9190623$	$\Gamma(-1-\frac{3}{4}) = 2.7623697$
$\Gamma(2) = 1$	$\Gamma(-2) = \pm\infty$
$\Gamma(2+\frac{1}{4}) = 1.1330032$	$\Gamma(-2-\frac{1}{4}) = -1.7428143$
$\Gamma(2+\frac{1}{2}) = 1.3293403$	$\Gamma(-2-\frac{1}{2}) = -0.9453086$
$\Gamma(2+\frac{3}{4}) = 1.608359$	$\Gamma(-2-\frac{3}{4}) = -1.004498$
$\Gamma(3) = 2$	$\Gamma(-3) = \pm\infty$
$\Gamma(3+\frac{1}{4}) = 2.549257$	$\Gamma(-3-\frac{1}{4}) = 0.5362505$
$\Gamma(3+\frac{1}{2}) = 3.3233507$	$\Gamma(-3-\frac{1}{2}) = 0.2700881$
$\Gamma(3+\frac{3}{4}) = 4.4229872$	$\Gamma(-3-\frac{3}{4}) = 0.2678661$
$\Gamma(4) = 6$	$\Gamma(-4) = \pm\infty$
$\Gamma(4+\frac{1}{4}) = 8.2850852$	$\Gamma(-4-\frac{1}{4}) = -0.1261765$
$\Gamma(4+\frac{1}{2}) = 11.631727$	$\Gamma(-4-\frac{1}{2}) = -0.0600195$
$\Gamma(4+\frac{3}{4}) = 16.586202$	$\Gamma(-4-\frac{3}{4}) = -0.0563928$
$\Gamma(5) = 24$	$\Gamma(-5) = \pm\infty$
$\Gamma(5+\frac{1}{4}) = 35.21161$	$\Gamma(-5-\frac{1}{4}) = 0.0240336$
$\Gamma(5+\frac{1}{2}) = 52.34277$	$\Gamma(-5-\frac{1}{2}) = 0.0109126$
$\Gamma(5+\frac{3}{4}) = 78.784457$	$\Gamma(-5-\frac{3}{4}) = 0.00980744$
$\Gamma(6) = 120$	$\Gamma(-6) = \pm\infty$

fig.293

【P645】3月8日(火) Gamma Function Γ(z)　(続き)

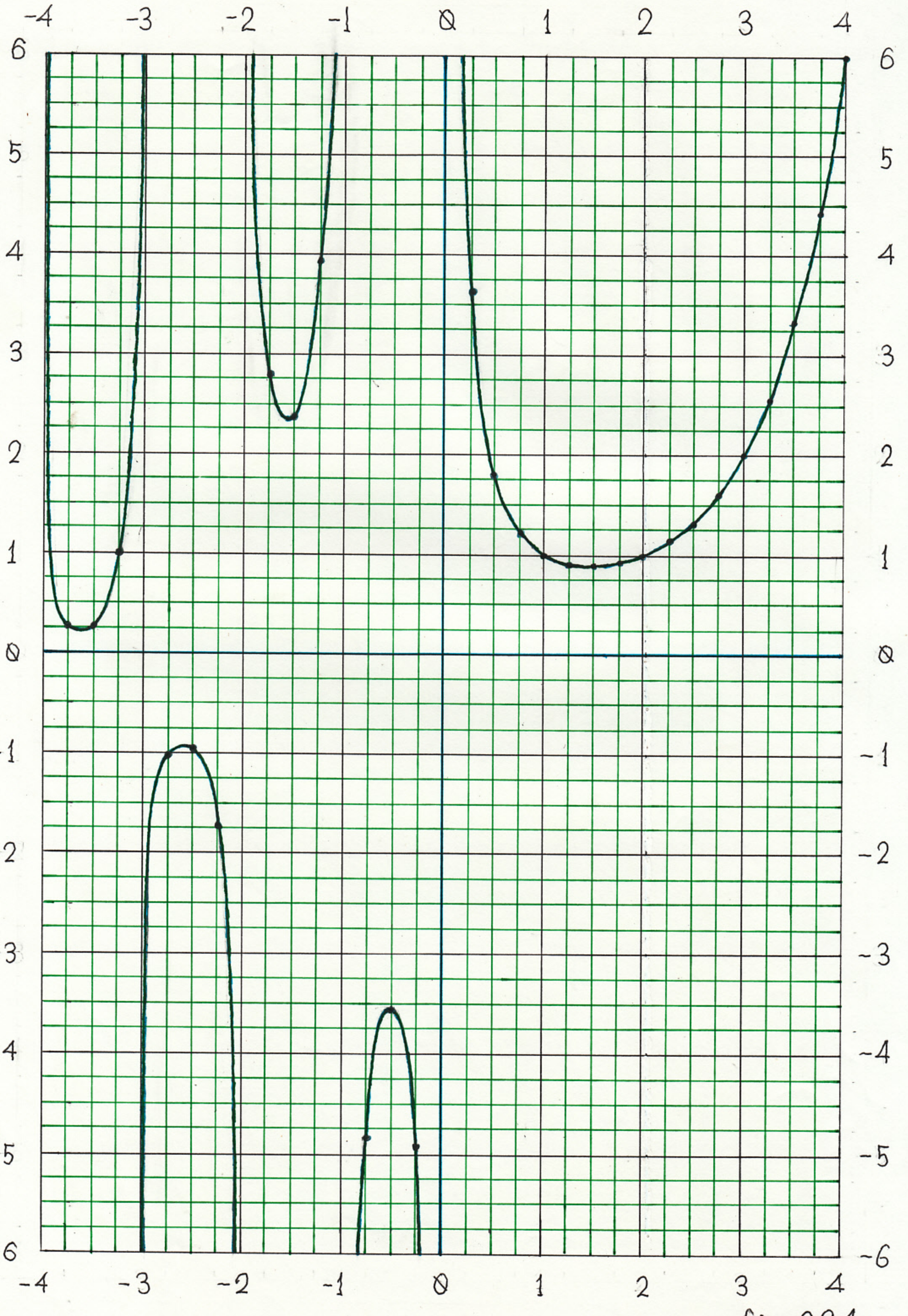

fig.294

● n次元単位球の体積

n次元単位球のn次元体積$v(n)$を考察しましょう。
しばらくは、Gamma Function $\Gamma(z)$に関しては何にも知らなかったことにして議論を進めることにします。
半径rのn次元球のn次元体積を$V_n(r)$とします。n次元単位球と半径rのn次元球は相似で、その相似比はrですから、定理(171)より

$V_n(r)$と$v(n)$の関係

$$V_n(r) = v(n)r^n \quad (n=1,2,3,\cdots) \qquad \text{定理(219)}$$

やはりしばらくは、$V_n(r)$, $v(n)$のnは正整数だとして議論することにします。怠け者のn次元体積の定義(167)より

$V_n(r)$と$v(n)$の定義式

$$V_n(r) = \underset{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leqq r^2}{\iint\cdots\int} 1\cdot dx_1 dx_2 \cdots dx_n, \quad (n=1,2,3,\cdots) \qquad .1)$$

$$v(n) = \underset{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leqq 1}{\iint\cdots\int} 1\cdot dx_1 dx_2 \cdots dx_n, \quad (n=1,2,3,\cdots) \qquad .2)$$

定義(220)

【P647】 n 次元単位球の体積　（続き）

定義（220.2）より直ちに

$$v(1) = \int_{x^2 \leqq 1} 1 \cdot dx = \int_{-1}^{1} dx = 2. \qquad (W1)$$

また、（220），（219）より

$$v(n+1) = \iint \cdots \int_{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) + x^2 \leqq 1} 1 \cdot dx_1 dx_2 \cdots dx_n dx$$

$$= \int_{x^2 \leqq 1} \left(\iint \cdots \int_{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leqq 1 - x^2} 1 \cdot dx_1 dx_2 \cdots dx_n \right) dx$$

$$= \int_{x^2 \leqq 1} V_n\left(\sqrt{1 - x^2}\right) dx$$

$$= \int_{x^2 \leqq 1} \left(\sqrt{1 - x^2}\right)^n v(n)\, dx$$

$$v(n+1) = 2v(n) \int_0^1 (1 - x^n)^{\frac{n}{2}} dx, \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \qquad (W2)$$

ここで右辺の積分は、$x = \sin\theta$ とおくと、$dx = \cos\theta\, d\theta$ だから

$$\int_0^1 (1 - x^2)^{\frac{n}{2}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2\theta)^{\frac{n}{2}} \cos\theta\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta)^{n+1} d\theta \qquad (W3)$$

【P648】n次元単位球の体積　（続き）

(W1), (W2), (W3) を定理としてまとめておきます。

C_n の定義と $v(n)$ との関係など

$$v(1) = 2 \qquad .1)$$

$$C_n \equiv \int_0^1 (1-x^2)^{\frac{n-1}{2}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta)^n d\theta, \quad (n = 0, 1, 2, \cdots) \qquad .2)$$

$$v(n+1) = 2C_{n+1}\, v(n), \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \qquad .3)$$

.2) より直ちに

$$C_0 = \frac{\pi}{2}, \qquad C_1 = 1. \qquad .4)$$

定理(221)

γ_n を導入しましょう。

γ_n の定義と $v(n)$ との関係

$$\gamma_n \equiv \prod_{i=1}^{n} C_i, \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \qquad .1)$$

$$v(n) = 2^n \gamma_n, \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \qquad .2)$$

定理(222)

.2) は、$v(1) = 2$, $C_1 = 1$, (221.3) より、自明です。

 n次元単位球の体積（続き）

次式が成り立ちます。

C_n が満たす等式（その1）

$$C_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} C_n \,,\quad (n = 0, 1, 2, \cdots) \qquad \text{定理(223)}$$

証明します。部分積分を行います。

$$C_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta)^{n+2} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta)(\cos\theta)^{n+1} d\theta$$

$$= \Big[(\sin\theta)(\cos\theta)^{n+1} \Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$- \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta)(n+1)(\cos\theta)^n (-\sin\theta)\, d\theta$$

$$= (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2\theta)(\cos\theta)^n d\theta$$

$$= (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta)^n d\theta - (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta)^{n+2} d\theta$$

$$C_{n+2} = (n+1) C_n - (n+1) C_{n+2}$$

$$(1 + n + 1) C_{n+2} = (n+1) C_n \,,\quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

Q.E.D.

【P650】n 次元単位球の体積　（続き）

(221.4), (223) より、$C_2, C_3, C_4, C_5, \cdots$ が順次求まります。

$$C_2 = \frac{1}{2} C_0 \qquad C_3 = \frac{2}{3} C_1$$

$$C_4 = \frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 2} C_0 \qquad C_5 = \frac{4 \cdot 2}{5 \cdot 3} C_1$$

$$C_6 = \frac{5 \cdot 3 \cdot 1}{6 \cdot 4 \cdot 2} C_0 \qquad C_7 = \frac{6 \cdot 4 \cdot 2}{7 \cdot 5 \cdot 3} C_1$$

$$C_8 = \frac{7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1}{8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2} C_0 \qquad C_9 = \frac{8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2}{9 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3} C_1$$

$$C_{10} = \frac{9 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1}{10 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2} C_0 \qquad C_{11} = \frac{10 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2}{11 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3} C_1$$

fig.295

$C_2 C_3 = \frac{1}{3} C_0 C_1$,　$C_4 C_5 = \frac{1}{5} C_0 C_1$,　$C_6 C_7 = \frac{1}{7} C_0 C_1$, $\cdots$ です。
次式が成り立つと期待できます。

C_n が満たす等式（その2）

$$C_{2m} \cdot C_{2m+1} = \frac{1}{2m+1} C_0 \cdot C_1, \quad (m = 0, 1, 2, \cdots) \qquad \text{定理(224)}$$

証明します。数学的帰納法を用います。
$m = 0$ のときは、両辺とも $C_0 \cdot C_1$ ですから、自明な恒等式として成り立ちます。$m = k$ のときに成り立つと仮定して、$m = k+1$ のときにも成り立つことを示します。(223) を用います。

【P651】3月12日(土) n次元単位球の体積（続き）

$$C_{2k+2}\cdot C_{2k+3} = \left(\frac{2k+1}{2k+2}C_{2k}\right)\cdot\left(\frac{2k+2}{2k+3}C_{2k+1}\right)$$

$$= \frac{2k+1}{2k+3}C_{2k}\cdot C_{2k+1} = \frac{2k+1}{2k+3}\left(\frac{1}{2k+1}C_0\cdot C_1\right)$$

$$= \frac{1}{2k+3}C_0\cdot C_1 \quad /\!/ \qquad \text{Q.E.D.}$$

fig.295をよくよく観察すれば、次式を帰納できるはずです。

C_nの直接表現

$$C_{2m} = \frac{(2m)!}{(2^m m!)^2}C_0 \ , \quad (m = 0, 1, 2, \cdots) \qquad .1)$$

$$C_{2m+1} = \frac{(2^m m!)^2}{(2m+1)!}C_1 \ , \quad (m = 0, 1, 2, \cdots) \qquad .2)$$

定理(225)

.1), .2)は(224)とつじつまが合います。よって、.1), .2)のどちらか一方を示せば十分です。
.1)を証明することにします。数学的帰納法を用います。$m = 0$のときは両辺ともC_0ですから、自明な恒等式として成り立ちます。$m = k$のときに成り立つと仮定して、$m = k+1$のときにも成り立つことを示します。(223)を用います。

$$C_{2k+2} = \frac{2k+1}{2k+2}C_{2k} = \frac{2k+1}{2k+2}\cdot\frac{(2k)!}{(2^k k!)^2}C_0$$

【P652】2022年3月12日(土) n次元単位球の体積（続き）

$$C_{2k+2} = \frac{(2k+2)(2k+1)}{(2k+2)^2} \cdot \frac{(2k)!}{(2^k k!)^2} C_0$$

$$= \frac{(2(k+1))!}{(2^{k+1}(k+1)!)^2} C_0 \quad // \qquad \text{Q.E.D.}$$

次式が成り立ちます。

γ_n が満たす等式（その1）

$$\gamma_1 = 1, \quad \gamma_2 = \frac{1}{2} C_0 \qquad \text{定理(226)}$$

証明します。

$$\gamma_1 = C_1 = 1 \quad //$$

$$\gamma_2 = C_2 C_1 = \frac{1}{2} C_0 C_1 = \frac{1}{2} C_0 \quad // \qquad \text{Q.E.D.}$$

次式が成り立ちます。

γ_n が満たす等式（その2）

$$\gamma_{n+2} = \frac{1}{n+2} \gamma_n C_0, \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \qquad \text{定理(227)}$$

数学的帰納法で証明します。

$$\gamma_3 = C_1 C_2 C_3 = C_1 \cdot \frac{1}{2} C_0 \cdot \frac{2}{3} C_1 = \frac{1}{3} C_0 = \frac{1}{3} \gamma_1 C_0$$

 n次元単位球の体積(続き)

よって、$n=1$のときは成り立ちます。$n=k$のときには成り立つと仮定し、$n=k+1$のときにも成り立つことを示します。

$$\gamma_{k+3} = C_{k+3}\gamma_{k+2} = \left(\frac{k+2}{k+3}C_{k+1}\right)\left(\frac{1}{k+2}\gamma_k C_0\right)$$

$$= \frac{1}{k+3}\left(C_{k+1}\gamma_k\right)C_0 = \frac{1}{k+3}\gamma_{k+1}C_0 \text{。} \qquad \text{Q.E.D.}$$

(226),(227)より、$\gamma_3, \gamma_4, \gamma_5, \cdots$ が順次求まります。

$$\gamma_1 = 1$$

$$\gamma_2 = \frac{1}{2}C_0, \qquad \gamma_3 = \frac{1}{3}C_0$$

$$\gamma_4 = \frac{1}{4\cdot 2}C_0^2, \qquad \gamma_5 = \frac{1}{5\cdot 3}C_0^2$$

$$\gamma_6 = \frac{1}{6\cdot 4\cdot 2}C_0^3, \qquad \gamma_7 = \frac{1}{7\cdot 5\cdot 3}C_0^3$$

$$\gamma_8 = \frac{1}{8\cdot 6\cdot 4\cdot 2}C_0^4, \qquad \gamma_9 = \frac{1}{9\cdot 7\cdot 5\cdot 3}C_0^4$$

$$\gamma_{10} = \frac{1}{10\cdot 8\cdot 6\cdot 4\cdot 2}C_0^5, \qquad \gamma_{11} = \frac{1}{11\cdot 9\cdot 7\cdot 5\cdot 3}C_0^5$$

$$\gamma_{12} = \frac{1}{12\cdot 10\cdot 8\cdot 6\cdot 4\cdot 2}C_0^6, \qquad \gamma_{13} = \frac{1}{13\cdot 11\cdot 9\cdot 7\cdot 5\cdot 3}C_0^6$$

fig.296

これらより、次式が成り立つことが容易に推測されます。

【P654】 n次元単位球の体積（続き）

γ_nの直接表現

$$\gamma_{2m} = \frac{1}{2^m m!} C_0^m, \qquad (m = 1, 2, 3, \cdots) \qquad .1)$$

$$\gamma_{2m+1} = \frac{2^m m!}{(2m+1)!} C_0^m, \qquad (m = 0, 1, 2, \cdots) \qquad .2)$$

定理(228)

数学的帰納法で証明します。

まず.1)を示します。$\gamma_2 = \frac{1}{2} C_0$ なので $m = 1$ のときは成り立ちます。また

$$\gamma_{2m+2} = \frac{1}{2m+2} \gamma_{2m} C_0 = \frac{1}{2(m+1)} \left(\frac{1}{2^m m!} C_0^m \right) C_0$$

$$= \frac{1}{2^{m+1}(m+1)!} C_0^{m+1} \quad /\!/$$

次に.2)を示します。$\gamma_1 = 1$ なので $m = 0$ のときは成り立ちます。また

$$\gamma_{2m+3} = \frac{1}{2m+3} \gamma_{2m+1} C_0 = \frac{1}{2m+3} \left(\frac{2^m m!}{(2m+1)!} C_0^m \right) C_0$$

$$= \frac{2(m+1)}{(2m+3)(2m+2)} \cdot \frac{2^m m!}{(2m+1)!} C_0^{m+1}$$

$$= \frac{2^{m+1}(m+1)!}{(2m+3)!} C_0^{m+1} \quad /\!/$$

Q.E.D.

(222.2), (228), $C_0 = \frac{\pi}{2}$ より、$v(n)$の直接表現が得られます。つまり、次式が成り立ちます。

 3月14日(月) n次元単位球の体積(続き)

$v(n)$ の直接表現

$$v(2m) = \frac{1}{m!}\pi^m, \qquad (m = 1, 2, 3, \cdots) \qquad .1)$$

$$v(2m+1) = \frac{2^{2m+1}m!}{(2m+1)!}\pi^m, \qquad (m = 0, 1, 2, \cdots) \qquad .2)$$

定理(229)

初めの幾つかの $v(n)$ の値を計算しておきましょう。

		$v(1)$	$= 2$
$v(2)$	$= \pi$	$v(3)$	$= \frac{4}{3}\pi$
$v(4)$	$= \frac{1}{2}\pi^2$	$v(5)$	$= \frac{8}{15}\pi^2$
$v(6)$	$= \frac{1}{6}\pi^3$	$v(7)$	$= \frac{16}{105}\pi^3$
$v(8)$	$= \frac{1}{24}\pi^4$	$v(9)$	$= \frac{32}{945}\pi^4$

fig.297

.1)の右辺は $m = 0$ の場合でも有意でその値は1です。それでは $v(0) = 1$ とすべきなのでしょうか? 幾何学的解釈が困難です。

 n次元単位球の体積（続き）

さて、定理（225.2）は、$C_1 = 1$ だから

$$C_{2m+1} = \frac{(2^m m!)^2}{(2m+1)!}, \quad (m = 0, 1, 2, \cdots) \qquad \text{(W4)}$$

一方 C_{2m+1} は、定義（221.2）より

$$C_{2m+1} = \int_0^1 (1-x^2)^m dx, \quad (m = 0, 1, 2, \cdots)$$

$$= \int_0^1 \left[\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (-x^2)^k \right] dx$$

$$= \sum_{k=0}^{m} \left[(-1)^k \binom{m}{k} \int_0^1 x^{2k} dx \right]$$

$$C_{2m+1} = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \frac{1}{2k+1} \binom{m}{k} \qquad \text{(W5)}$$

（W4），（W5），および（178.4）より、次が得られます。

2項係数に関する恒等式（その1）

$$\sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k}{2k+1} \binom{m}{k} = \frac{(2^m m!)^2}{(2m+1)!}, \quad (m = 0, 1, 2, \cdots) \qquad .1)$$

$$\sum_{k=0}^{m} (-1)^k \frac{(2^k k!)^2}{(2k+1)!} \binom{m}{k} = \frac{1}{2m+1}, \quad (m = 0, 1, 2, \cdots) \qquad .2)$$

定理（230）

【P657】n次元単位球の体積（続き）

定義(221.2)より、C_{2m+1}はまた、

$$C_{2m+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta)^{2m+1} d\theta \,, \quad (m = 0, 1, 2, \cdots) \qquad (W6)$$

でもあります。一方、Tchebicheff多項式$T_n(x)$に関する公式の1つ(188.2)は

$$x^{2m+1} = \frac{1}{2^{2m}} \sum_{k=0}^{m} \binom{2m+1}{m+k+1} T_{2k+1}(x) \,, \quad (m = 0, 1, 2, \cdots)$$

ですが、$T_n(x)$の定義(180)、$T_n(\cos\theta) = \cos n\theta$より

$$(\cos\theta)^{2m+1} = \frac{1}{2^{2m}} \sum_{k=0}^{m} \binom{2m+1}{m+k+1} \cos(2k+1)\theta \qquad (W7)$$

(W6),(W7)より

$$C_{2m+1} = \frac{1}{2^{2m}} \sum_{k=0}^{m} \binom{2m+1}{m+k+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2k+1)\theta \, d\theta \qquad (W8)$$

この式の右辺の各積分は、$(2k+1)\theta = \eta$とおくと

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2k+1)\theta \, d\theta &= \frac{1}{2k+1} \int_0^{k\pi+\frac{\pi}{2}} \cos\eta \, d\eta \\ &= \frac{1}{2k+1} \sin\left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2k+1} (-1)^k \qquad (W9) \end{aligned}$$

(W8),(W9)より

n次元単位球の体積（続き）

$$C_{2m+1} = \frac{1}{2^{2m}} \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k}{2k+1} \binom{2m+1}{m+k+1} \qquad \text{(W10)}$$

(W4), (W10) より、次式が得られます。

2項係数に関する恒等式（その2）

$$\frac{1}{2^{2m}} \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k}{2k+1} \binom{2m+1}{m+k+1} = \frac{(2^m m!)^2}{(2m+1)!}, \quad (m = 0, 1, 2, \cdots)$$

定理(231)

n次元単位球のn次元体積 $v(n)$ を求めるという当節の目標は一応(229)で達成されましたが、(229)は残念ながらとても満足できるものではありません。というのも、nが偶数の場合と奇数の場合とに場合分けして $v(n)$ を表現しているからです。

その源は C_n の式(225)にあります。

当節の冒頭で、"しばらくは Gamma Function $\Gamma(z)$ に関しては何も知らなかったことにして議論を進めることにします。"、と述べましたが、ここで、$\Gamma(z)$ を解禁することにしましょう。

$\Gamma(z)$ に関する公式(216.1)を再記しましょう。

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta)^{2a-1} (\sin\theta)^{2b-1} d\theta = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}, \quad \Re(a) > 0, \Re(b) > 0$$

再記(216.1)

 n次元単位球の体積(続き)

C_nの定義式(221.2)と(216.1)より

$$C_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta)^n d\theta \quad , \quad (n = 0, 1, 2, 3, \cdots)$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta)^{2\cdot\frac{n+1}{2}-1} (\sin\theta)^{2\cdot\frac{1}{2}-1} d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{n+1}{2}+\frac{1}{2})}$$

C_nの Gamma Function による表現

$$C_n = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{2\Gamma(\frac{n+2}{2})} \quad , \quad (n = 0, 1, 2, 3, \cdots)$$

定理(232)

γ_nも Gamma Function を用いて表現できます。次式が成り立ちます。

γ_nの Gamma Function による表現

$$\gamma_n = \frac{1}{\Gamma(\frac{n+2}{2})} \cdot \left(\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^n \quad , \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

定理(233)

証明します。数学的帰納法を用います。

【P66Q】n次元単位球の体積 (続き)

$\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})$, $\gamma_1 = C_1 = 1$ ですから、$n=1$のときは成り立ちます。$n=k$のときは成り立つと仮定して、$n=k+1$の ときも成り立つことを示します. (232)を用います。

$$\gamma_{k+1} = \prod_{i=1}^{k+1} C_i = C_{k+1}\prod_{i=1}^{k} C_i = C_{k+1}\gamma_k$$

$$= \frac{\Gamma(\frac{k+2}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{2\Gamma(\frac{k+3}{2})} \cdot \frac{1}{\Gamma(\frac{k+2}{2})} \cdot \left(\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})\right)^k$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\frac{k+3}{2})} \cdot \left(\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})\right)^{k+1} \text{〃} \qquad \text{Q.E.D.}$$

(222.2), (233) 及び $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ より、$v(n)$は

$$v(n) = \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} \cdot \pi^{\frac{n}{2}}, \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

$n \to z$とおき、全複素平面上で定義された関数 $v(z)$を次式で定義します。

$v(z)$の Gamma Function による表現

$$v(z) = \frac{1}{\Gamma(\frac{z}{2}+1)} \cdot \pi^{\frac{z}{2}} \qquad \text{定義(234)}$$

zが正整数のときは、$v(z)$は z次元単位球の z次元体積を表わします. $v(z)$は全複素平面上で正則であり、その零点は $z = -2, -4, -6, \cdots$ です。

3月17日(木) n次元単位球の体積(続き)

$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ ですから $v(z)$ は次のようにも表わされます。

$$v(2z) = \frac{\pi^z}{z\Gamma(z)} \qquad \text{(W11)}$$

ここで、$\Gamma(z)$ の Weierstrass' Form (214) を再記しましょう。

$$\frac{1}{z\Gamma(z)} = e^{\gamma z}\prod_{n=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{z}{n}\right)\exp\left(-\frac{z}{n}\right)\right] \qquad \text{再記(214)}$$

$\pi^z = \exp(z\log\pi)$ ですから、(W11), (214) より

$v(2z)$ の無限積表現

$$v(2z) = e^{\delta z}\prod_{n=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{z}{n}\right)\exp\left(-\frac{z}{n}\right)\right] \qquad .1)$$

ただしここで δ は

$$\delta = \gamma + \log\pi \fallingdotseq 1.721945 \qquad .2)$$

定理(235)

γ と $\log\pi$ が和として現われることがあるとは!! 不思議です。
.1) は、Weierstrass Factor Theorem (210) を想起させます。

$$f(z) = f(0)\exp\left(\frac{f'(0)}{f(0)}z\right)\prod_{n=1}^{\infty}\left[\left(1-\frac{z}{a_n}\right)\exp\left(\frac{z}{a_n}\right)\right]$$

再記(210.2)

【P662】3月18日(金) n次元単位球の体積(続き)

ここで a_n ($n=1,2,3,\cdots$) は $f(z)$ の1位の零点です。(235.1)と(210.2)を良く見比べよう。$v(2z)$ の零点は $-1,-2,-3,\cdots$ です。また $v(0)=1$ です。従って次式が成り立ちます。

$v'(0)$ の値

$$v'(0) = \frac{1}{2}(\gamma + \log\pi) \qquad \text{定理(236)}$$

次式が成り立ちます。

$v'(z)$ に関する差分恒等式

$$\frac{v'(z+2)}{v(z+2)} = \frac{v'(z)}{v(z)} - \frac{1}{z+2} \qquad \text{定理(237)}$$

証明します。(W11)の表現を用いて計算します。

$$v(z+2) = \frac{\pi^{\frac{z+2}{2}}}{\frac{z+2}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{z+2}{2}\right)} = \frac{2\pi}{z+2}\cdot\frac{\pi^{\frac{z}{2}}}{\frac{z}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)}$$

$$v(z+2) = \frac{2\pi}{z+2}\cdot v(z) \qquad \text{(W12)}$$

(W12)の両辺を z で微分します。

$$v'(z+2) = \frac{2\pi}{z+2}\cdot v'(z) - \frac{2\pi}{(z+2)^2}\cdot v(z) \qquad \text{(W13)}$$

【P663】n次元単位球の体積（続き）

(W13)を(W12)で割れば(237)が得られます。　Q.E.D.

次式が成り立ちます。

$v'(2m)$に関する等式

$$\frac{v'(2m)}{v(2m)} = \frac{1}{2}\left(\gamma + \log\pi - \sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k}\right), \quad (m = 1, 2, 3, \cdots)$$

定理(238)

ほとんど自明ですが一応証明します。(236), (237)を用います。数学的帰納法を用います。(237)において $z = 0$ とおくと

$$\frac{v'(2)}{v(2)} = \frac{v'(0)}{v(0)} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(\gamma + \log\pi - 1)$$

よって $m = 1$ のときは成り立ちます。$m = k$ のときには成り立つと仮定して、$m = k + 1$ のときにも成り立つことを示します。

$$\frac{v'(2k+2)}{v(2k+2)} = \frac{v'(2k)}{v(2k)} - \frac{1}{2k+2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\gamma + \log\pi - \sum_{l=1}^{k}\frac{1}{l}\right) - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{k+1}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\gamma + \log\pi - \sum_{l=1}^{k+1}\frac{1}{l}\right)_{\text{〃}} \qquad \text{Q.E.D.}$$

負の偶数点に関しても(238)と同様の式が成り立つと思うかもしれませんが、残念ながら(to My Regret)そういう訳にはいかないのです。(237)を変形すれば

【P664】 n次元単位球の体積（続き）

$$\frac{\upsilon'(z-2)}{\upsilon(z-2)} = \frac{\upsilon'(z)}{\upsilon(z)} + \frac{1}{z} \tag{W14}$$

が得られます。でもこの式は $z=0$ で破綻します。ですから、$\upsilon'(0)/\upsilon(0)$ から $\upsilon'(-2)/\upsilon(-2)$ を求めることすら出来ません。(238)と、(229.1)の $\upsilon(2m)$ を用いて、幾つかの m について $\upsilon'(2m)$ を計算しておきましょう。

$$\upsilon'(0) = \frac{1}{2}(\gamma + \log\pi) = 0.8609727$$

$$\upsilon'(2) = \pi\cdot\frac{1}{2}(\gamma + \log\pi - 1) = 1.1340291$$

$$\upsilon'(4) = \frac{\pi^2}{2}\cdot\frac{1}{2}\left(\gamma + \log\pi - \frac{3}{2}\right) = 0.5476283 > 0$$

$$\upsilon'(6) = \frac{\pi^3}{6}\cdot\frac{1}{2}\left(\gamma + \log\pi - \frac{11}{6}\right) = -0.2878103 < 0$$

$$\upsilon'(8) = \frac{\pi^4}{24}\cdot\frac{1}{2}\left(\gamma + \log\pi - \frac{25}{12}\right) = -0.7333846$$

$$\upsilon'(10) = \frac{\pi^5}{120}\cdot\frac{1}{2}\left(\gamma + \log\pi - \frac{137}{60}\right) = -0.7158154$$

$$\upsilon'(12) = \frac{\pi^6}{720}\cdot\frac{1}{2}\left(\gamma + \log\pi - \frac{147}{60}\right) = -0.4860719$$

fig.298

実数変数 x に対して $\upsilon(x)$ のふるまいを知りたいのですが、そのためにも $\upsilon'(x)$ のふるまいを知りたいのです。今のところ(238)が得られただけです。fig.298より、$\upsilon(x)$ の極大点が $4<x<6$ のどこかにあることがわかります。たぶん $x=5.??\cdots$ あたりでしょう。

 3月19日(土) n次元単位球の体積(続き)

$v(0) =$	1		
$v(\frac{1}{2}) =$	1.4688122	$v(-\frac{1}{2}) =$	0.6129554
$v(1) =$	2	$v(-1) =$	0.3183099
$v(1+\frac{1}{2}) =$	2.5675412	$v(-1-\frac{1}{2}) =$	0.1168843
$v(2) =$	3.1415926	$v(-2) =$	0
$v(2+\frac{1}{2}) =$	3.6915281	$v(-2-\frac{1}{2}) =$	−0.0487774
$v(3) =$	4.1887904	$v(-3) =$	−0.0506605
$v(3+\frac{1}{2}) =$	4.6092394	$v(-3-\frac{1}{2}) =$	−0.027904
$v(4) =$	4.9348021	$v(-4) =$	0
$v(4+\frac{1}{2}) =$	5.1543457	$v(-4-\frac{1}{2}) =$	0.0194079
$v(5) =$	5.2637893	$v(-5) =$	0.0241886
$v(5+\frac{1}{2}) =$	5.2655827	$v(-5-\frac{1}{2}) =$	0.0155437
$v(6) =$	5.1677126	$v(-6) =$	0
$v(6+\frac{1}{2}) =$	4.9824171	$v(-6-\frac{1}{2}) =$	−0.0138999
$v(7) =$	4.7247663	$v(-7) =$	−0.0192487
$v(7+\frac{1}{2}) =$	4.4112844	$v(-7-\frac{1}{2}) =$	−0.0136062
$v(8) =$	4.0587121	$v(-8) =$	0
$v(8+\frac{1}{2}) =$	3.6829943	$v(-8-\frac{1}{2}) =$	0.0143795
$v(9) =$	3.2985092	$v(-9) =$	0.0214447
$v(9+\frac{1}{2}) =$	2.9175704	$v(-9-\frac{1}{2}) =$	0.0162412
$v(10) =$	2.550164	$v(-10) =$	0

fig.299

$v(z)$の定義式(234)と、fig.293の$\Gamma(z)$の値を用いて計算しました。Graphを描きましょう。

【P666】3月20日(日) n次元単位球の体積(続き)

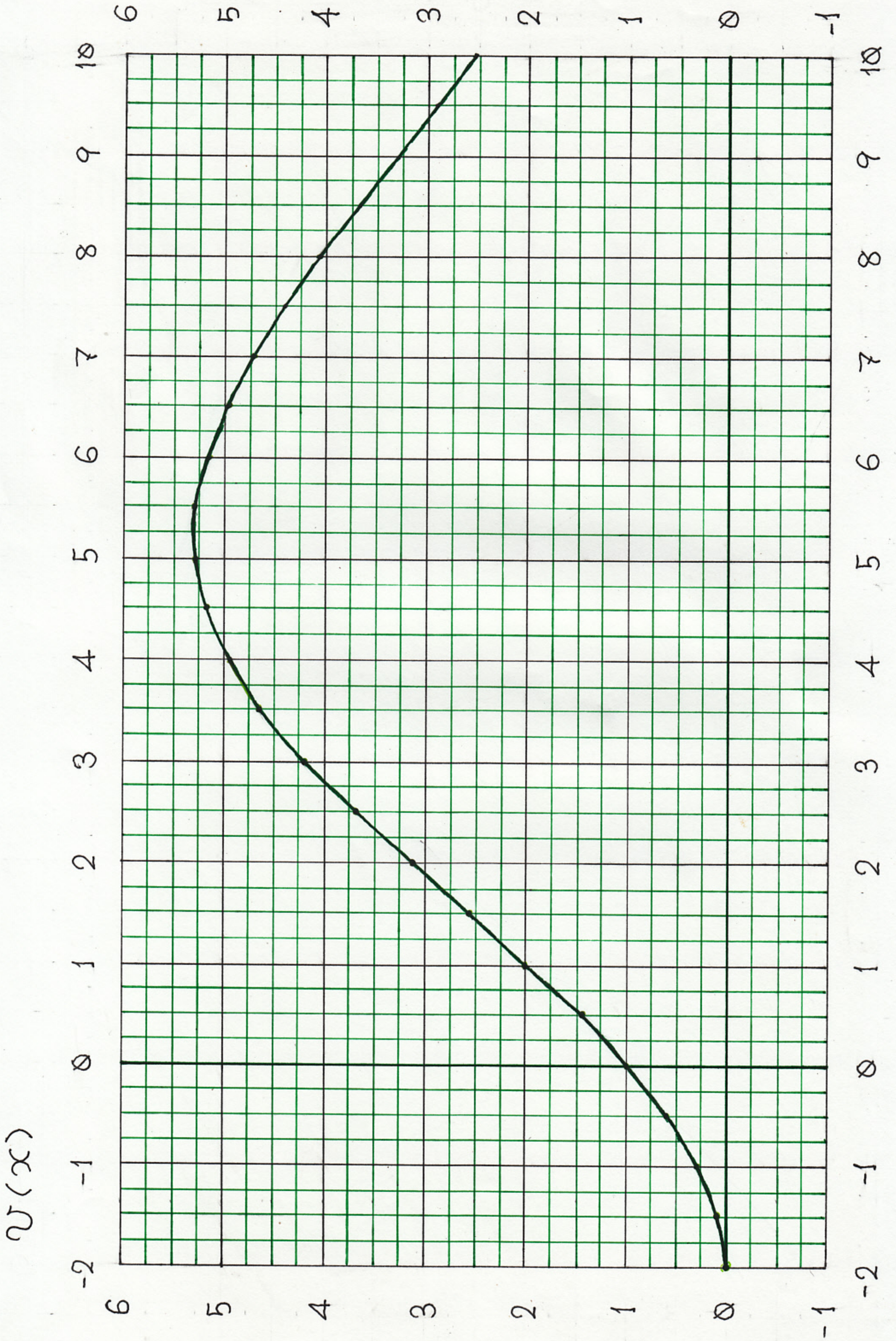

fig.300

3月21日(月) n 次元単位球の体積(続き)

$v'(z)$に関する差分恒等式(232), $v'(2m)$に関する等式(238), 及び、Euler Constant γの定義式(214.2)を再記します。

$$\frac{v'(z+2)}{v(z+2)} = \frac{v'(z)}{v(z)} - \frac{1}{z+2} \qquad (232)$$

$$\frac{v'(2m)}{v(2m)} = \frac{1}{2}\left(\gamma + \log\pi - \sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k}\right), \quad (m=1,2,3,\cdots) \qquad (238)$$

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right) - \log n\right) \qquad (214.2)$$

再記

これら3つの式をじっくり観察しましょう。共通する隠れた数学的構造が存在するとするならば、それは何なのか? よくよく考えた結果、ある複素関数に思い至りました。気付いてしまえば、ほとんど必然的であると思われる関数です。それは次式で定義される関数です。

Euler-Mascheroni Function $\gamma(z)$の定義

$$\gamma(z) = \lim_{n\to\infty}\left(\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{z+k}\right) - \log n\right) \qquad .1)$$

.1), (214.2)より

$$\gamma(0) = \gamma \qquad .2)$$

定義(239)

 n次元単位球の体積（続き）

$\gamma(z)$を単にMascheroni Functionと呼ぶこともあるとします。Euler Functionという名称は使えません。Euler Functionと呼ばれている有名な整数論的関数$\varphi(n)$が存在するからです。$\gamma(z)$はまた、そのまま文字通り、Small Gamma Functionとも呼ぶものとします。Mascheroni Functionと呼ばれている、$\gamma(z)$とは異なる関数が存在するかもしれないからです。

$\gamma(z)$がいかにして登場することになるのかを議論する前に、初等的ではあるがとても重要な、微分に関する恒等式を呈示しましょう。

可微分な4つの関数$f(z)$, $g_1(z)$, $g_2(z)$, $g_3(z)$が次の関係にあるとします。

$$f(z) = g_1(z)\,g_2(z)\,g_3(z) \tag{W15}$$

両辺をzで微分すれば

$$\begin{aligned} f'(z) = {} & g_1'(z)\,g_2(z)\,g_3(z) \\ & + g_1(z)\,g_2'(z)\,g_3(z) \\ & + g_1(z)\,g_2(z)\,g_3'(z) \end{aligned} \tag{W16}$$

(W16)を(W15)で割れば

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{g_1'(z)}{g_1(z)} + \frac{g_2'(z)}{g_2(z)} + \frac{g_3'(z)}{g_3(z)} \tag{W17}$$

これを一般化すれば次式が得られるのは自明です。

【P669】 n次元単位球の体積（続き）

微分に関するささやかな恒等式

$$f(z) = \prod_{k=1}^{n} g_k(z) \Longrightarrow \frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{g_k'(z)}{g_k(z)} \qquad .1)$$

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} g_n(z) \Longrightarrow \frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_n'(z)}{g_n(z)} \qquad .2)$$

定理(240)

$\Gamma(z)$ の Weierstrass Form (214) を思い出そう。

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z e^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left[\left(1+\frac{z}{n}\right) \exp\left(-\frac{z}{n}\right) \right] \qquad \text{再記}(214.1)$$

$$\frac{\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{\Gamma(z)}\right)}{\left(\frac{1}{\Gamma(z)}\right)} = \Gamma(z) \cdot \frac{-\Gamma'(z)}{(\Gamma(z))^2} = -\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} \qquad (W18)$$

この式と(214.1)，(240.2)より

$$-\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = \frac{1}{z} + \frac{\gamma e^{\gamma z}}{e^{\gamma z}} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{z}{n}} + \frac{-\frac{1}{n}\exp\left(-\frac{z}{n}\right)}{\exp\left(-\frac{z}{n}\right)} \right]$$

$$= \frac{1}{z} + \gamma + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z+n} - \frac{1}{n} \right)$$

【P670】3月23日（水）n次元単位球の体積（続き）

γの定義式(214.1), $\gamma(z)$の定義式(239.1)より

$$-\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = \frac{1}{z} + \lim_{n\to\infty}\left[\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right) - \log n + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{z+k} - \frac{1}{k}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{z} + \lim_{n\to\infty}\left[\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{z+k}\right) - \log n\right]$$

$$= \frac{1}{z} + \gamma(z)$$

$\Gamma(z)$と$\gamma(z)$の関係

$$-\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = \gamma(z) + \frac{1}{z}$$

定理(241)

次に、$\upsilon(z)$と$\gamma(z)$との関係を求めよう。$\upsilon(2z)$の無限積表現(235)を思い出そう。再記します。

$$\upsilon(2z) = e^{\delta z}\prod_{n=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{z}{n}\right)\exp\left(-\frac{z}{n}\right)\right] \quad .1)$$

$$\delta = \gamma + \log\pi \quad .2)$$

再記(235)

$$\frac{\frac{d}{dz}\upsilon(2z)}{\upsilon(2z)} = 2\frac{\upsilon'(2z)}{\upsilon(2z)} \quad (W19)$$

【P671】 n次元単位球の体積（続き）

(241)を導出したのとほとんど同じ計算によって、(W19), (235), (240.2), (239.1)より、次式が得られるのは明らかです。

$\upsilon(z)$と$\gamma(z)$の関係

$$2\frac{\upsilon'(2z)}{\upsilon(2z)} = \gamma(z) + \log\pi \qquad \text{定理(242)}$$

また、$\gamma(z)$の定義(239)から直ちに、次の式が得られます。

$\gamma(z)$の差分恒等式

$$\gamma(z+1) = \gamma(z) - \frac{1}{z+1} \qquad \text{定理(243)}$$

この式と$\gamma(0) = \gamma$から、正整数点$z = n$における$\gamma(n)$の値は全て、計算できます。勿論 定義(239)から明らかなように、$\gamma(z)$は1位の極 $z = -1, -2, -3, \cdots$ をもち、それら以外の点では正則です。また、(243)から、

$$\gamma(n) = \gamma - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}, \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \qquad \text{(W20)}$$

です。従って、$n \to \infty$で$\gamma(n)$は$-\log n$と同じ速さで$-\infty$に発散すると思われます。$0 \leqq x \leqq 1$の$\Gamma'(1+x)$の近似値が得られれば、定理(241), (243)を用いて、望むだけの点における$\gamma(x)$の近似値を求めることが出来ます。また、$0 \leqq x \leqq 1$の

【P672】3月24日（木）n次元単位球の体積（続き）

$\Gamma'(1+x)$ の近似値は、定理(218)の式を微分すれば得られます。但し(218)よりは精度は落ちます。でも $\gamma(x)$ の Graph を描くためには十分です.

$\Gamma'(z)$ の近似値

$$\Gamma'(1+x) = \sum_{n=0}^{7} b'_n x^n + \varepsilon(x), \quad 0 \leqq x \leqq 1$$

$$|\varepsilon(x)| < 1 \times 10^{-5} \ ?$$

$b'_0 = -.577191652$ $b'_1 = 1.9764116$ $b'_2 = -2.6911707$

$b'_3 = 3.6728272$ $b'_4 = -3.78352$ $b'_5 = 2.8931958$

$b'_6 = -1.3546946$ $b'_7 = 0.2869464$

定理(244)

$\Gamma(1+\frac{1}{4}) = 0.9064026$ $\Gamma'(1+\frac{1}{4}) = -0.2061727$

$\Gamma(1+\frac{1}{2}) = 0.8862269$ $\Gamma'(1+\frac{1}{2}) = +0.0360527$

$\Gamma(1+\frac{3}{4}) = 0.9190623$ $\Gamma'(1+\frac{3}{4}) = +0.2274433$

$\gamma(1+\frac{1}{4}) = -0.5725374$

$\gamma(1+\frac{1}{2}) = -0.7073477$

$\gamma(1+\frac{3}{4}) = -0.8189017$

fig.301

【P673】3月25日(金) n次元単位球の体積(続き)

$\gamma(0) = 0.5772156649015328606\ldots\ldots$

$\gamma(\frac{1}{4}) = 0.2274626$	$\gamma(-\frac{1}{4}) = 1.0858601$
$\gamma(\frac{1}{2}) = -0.0406811$	$\gamma(-\frac{1}{2}) = 1.9593189$
$\gamma(\frac{3}{4}) = -0.2474732$	$\gamma(-\frac{3}{4}) = 4.2274626$
$\gamma(1) = -0.4227844$	$\gamma(-1) = \pm\infty$
$\gamma(1+\frac{1}{4}) = -0.5725374$	$\gamma(-1-\frac{1}{4}) = -2.9141399$
$\gamma(1+\frac{1}{2}) = -0.7073477$	$\gamma(-1-\frac{1}{2}) = -0.0406811$
$\gamma(1+\frac{3}{4}) = -0.8189017$	$\gamma(-1-\frac{3}{4}) = 2.8941293$
$\gamma(2) = -0.9227844$	$\gamma(-2) = \pm\infty$
$\gamma(2+\frac{1}{4}) = -1.0169818$	$\gamma(-2-\frac{1}{4}) = -3.7141399$
$\gamma(2+\frac{1}{2}) = -1.1073477$	$\gamma(-2-\frac{1}{2}) = -0.7073477$
$\gamma(2+\frac{3}{4}) = -1.182538$	$\gamma(-2-\frac{3}{4}) = 2.3227008$
$\gamma(3) = -1.2561177$	$\gamma(-3) = \pm\infty$
$\gamma(3+\frac{1}{4}) = -1.3246741$	$\gamma(-3-\frac{1}{4}) = -4.1585843$
$\gamma(3+\frac{1}{2}) = -1.3930619$	$\gamma(-3-\frac{1}{2}) = -1.1073477$
$\gamma(3+\frac{3}{4}) = -1.4492046$	$\gamma(-3-\frac{3}{4}) = 1.9590645$
$\gamma(4) = -1.5061177$	$\gamma(-4) = \pm\infty$
$\gamma(4+\frac{1}{4}) = -1.5599682$	$\gamma(-4-\frac{1}{4}) = -4.4662766$
$\gamma(4+\frac{1}{2}) = -1.6152841$	$\gamma(-4-\frac{1}{2}) = -1.3930619$
$\gamma(4+\frac{3}{4}) = -1.6597309$	$\gamma(-4-\frac{3}{4}) = 1.6923979$
$\gamma(5) = -1.7061177$	$\gamma(-5) = \pm\infty$
$\gamma(5+\frac{1}{4}) = -1.7504443$	$\gamma(-5-\frac{1}{4}) = -4.7015707$
$\gamma(5+\frac{1}{2}) = -1.7971022$	$\gamma(-5-\frac{1}{2}) = -1.6152841$
$\gamma(5+\frac{3}{4}) = -1.8336439$	$\gamma(-5-\frac{3}{4}) = 1.4818716$
$\gamma(6) = -1.8727844$	$\gamma(-6) = \pm\infty$

fig.302

【P674】3月26日(土) n次元単位球の体積(続き)

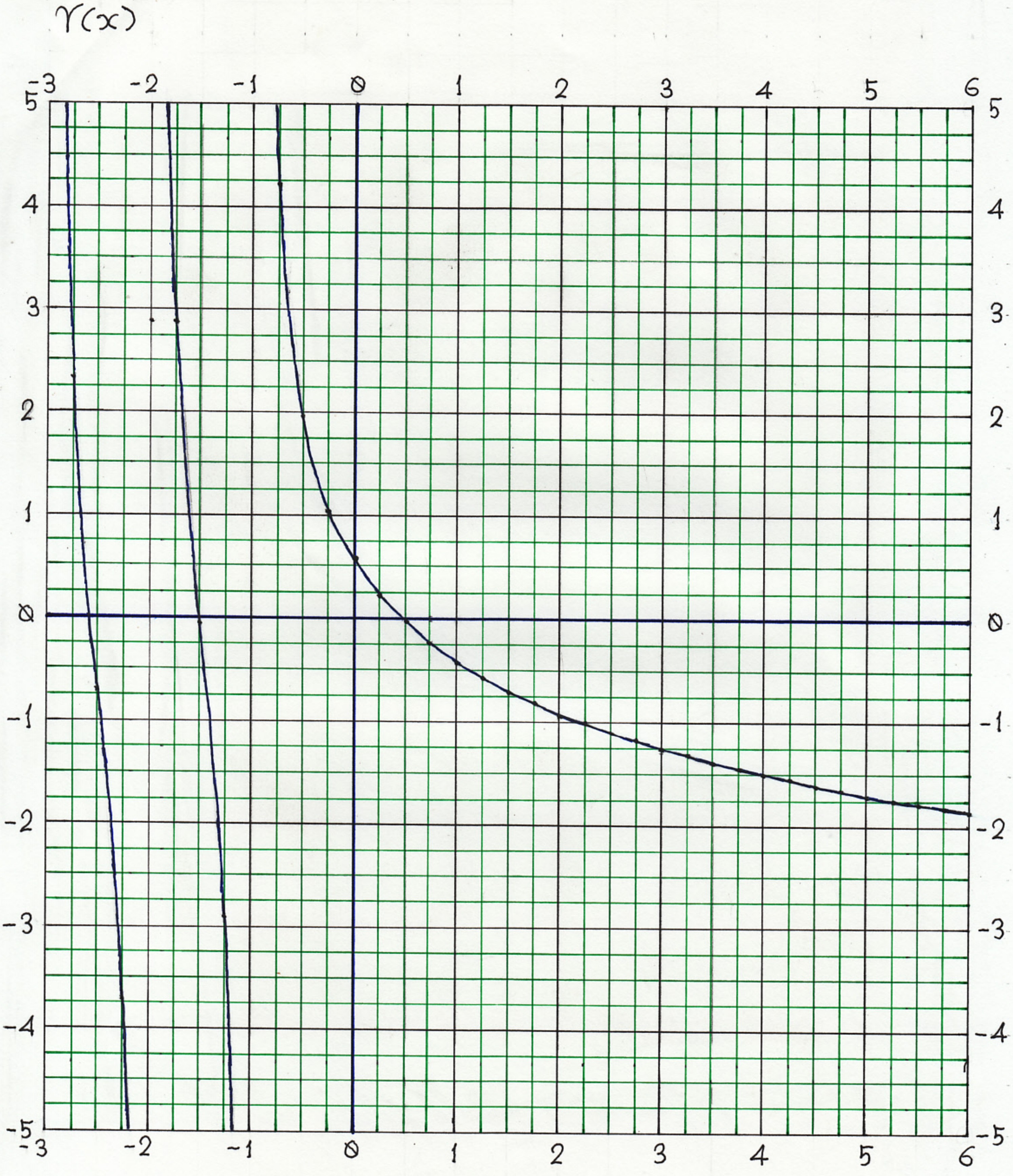

fig.303

● 小休止：肖像画(その2)

Leonhard Euler (1707-1783)

Euler

Carl Gustav Jacob
Jacobi (1804-1851)

Fourier

Jacobi

Jean Baptiste Joseph
Fourier (1768-1830)

Riemann

Georg Friedrich B.
Riemann (1826-1866)

fig.304