● Tchebicheff 多項式

Tchebicheff (Chebyshev) の多項式 (Polynomials) $T_n(x)$ について手短にまとめてみましょう。当節の結果の一部は、後述の議論で2項係数に関する恒等式の導出に用いる予定です。

Tchebicheff (1821〜1894) は Russia の数学者で、Euler, Riemann, Dirichlet とともに解析的数論の創始者の一人にかぞえられているそうです。また彼は1850年に、Bertrand? の予想

n が3より大きい自然数とすれば、n と $2(n-1)$ の間に少なくとも1つの素数が存在する。　(W1)

が正しいことを証明したそうです。(W1) は当節の対象外です。

Tchebicheff 多項式には Type I と Type II がありますが、当節で論じるのは Type I です。Tchebicheff 多項式の議論の基礎を成すのは、Euler の公式

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \tag{W2}$$

です。それだけだとも云えるでしょう。

$\cos 2\theta, \cos 3\theta, \cos 4\theta, \cdots$ を計算してみましょう。

$$\cos 2\theta = \cos(\theta+\theta) = \cos\theta\cos\theta - \sin\theta\sin\theta = 2\cos^2\theta - 1$$
$$\sin 2\theta = \sin(\theta+\theta) = \sin\theta\cos\theta + \cos\theta\sin\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$
$$\cos 3\theta = \cos(\theta+2\theta) = \cos\theta\cos 2\theta - \sin\theta\sin 2\theta$$

【P533】 Tchebicheff多項式（続き）

$$
\begin{aligned}
\cos 3\theta &= \cos\theta(2\cos^2\theta - 1) - \sin\theta(2\sin\theta\cos\theta) \\
&= 2\cos^3\theta - \cos\theta - 2(1-\cos^2\theta)\cos\theta \\
&= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta \\
\cos 4\theta &= \cos(2\theta+2\theta) = \cos 2\theta\cos 2\theta - \sin 2\theta \sin 2\theta \\
&= (2\cos^2\theta - 1)^2 - (2\sin\theta\cos\theta)^2 \\
&= 4\cos^4\theta - 4\cos^2\theta + 1 - 4(1-\cos^2\theta)\cos^2\theta \\
&= 8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1
\end{aligned}
$$

このように、一般に $\cos n\theta$ は $\cos\theta$ の n 次多項式で表わされると予想されます。 実際、Eulerの公式（W2）を用いれば、非負整数 n, m に対して、（任意の実数 n, m でも同じです）、

$$
\begin{aligned}
\cos n\theta \cdot \cos m\theta &= \frac{1}{2}(e^{in\theta} + e^{-in\theta}) \cdot \frac{1}{2}(e^{im\theta} + e^{-im\theta}) \\
&= \frac{1}{4}(e^{i(n+m)\theta} + e^{i(n-m)\theta} + e^{-i(n-m)\theta} + e^{-i(n+m)\theta}) \\
&= \frac{1}{4}(e^{i(n+m)\theta} + e^{-i(n+m)\theta}) + \frac{1}{4}(e^{i(n-m)\theta} + e^{-i(n-m)\theta}) \\
&= \frac{1}{2}\cos(n+m)\theta + \frac{1}{2}\cos(n-m)\theta
\end{aligned}
$$

$\cos n\theta \cos m\theta$ に関する恒等式

非負整数 n, m に対して、次式が成り立ちます。

- $$2\cos n\theta \cdot \cos m\theta = \cos(n+m)\theta + \cos(n-m)\theta \qquad .1)$$

【P534】 Tchebicheff 多項式（続き）

特に $m=1$ とおけば

- $\cos(n+1)\theta = 2\cos\theta\cos n\theta - \cos(n-1)\theta, \quad (n \geqq 1)$ 　.2)

定理(179)

.2) より、$\cos n\theta$ が $\cos\theta$ の n 次多項式であることは明白です。この多項式を Type I の Tchebicheff 多項式と呼びます。

TypeIの Tchebicheff 多項式 $T_n(\cdot)$ の定義

$$T_n(\cos\theta) = \cos n\theta$$

定義(180)

定理（179.2）, 定義(180)より

$T_n(x)$ の漸化式

- $T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x$ 　.1)
- $T_{n+1}(x) = 2x\,T_n(x) - T_{n-1}(x) \quad (n \geqq 1)$ 　.2)

定理(181)

定理(181)を用いれば、$T_2(x), T_3(x), T_4(x), \cdots$ を望むだけ、順次計算することが出来ます。幾つか求めてみましょう。

 Tchebicheff 多項式(続き)

$$
\begin{aligned}
T_0(x) &= 1 \\
T_1(x) &= x \\
T_2(x) &= -1 + 2x^2 \\
T_3(x) &= -3x + 4x^3 \\
T_4(x) &= 1 - 8x^2 + 8x^4 \\
T_5(x) &= 5x - 20x^3 + 16x^5 \\
T_6(x) &= -1 + 18x^2 - 48x^4 + 32x^6 \\
T_7(x) &= -7x + 56x^3 - 112x^5 + 64x^7 \\
T_8(x) &= 1 - 32x^2 + 160x^4 - 256x^6 + 128x^8 \\
T_9(x) &= 9x - 120x^3 + 432x^5 - 576x^7 + 256x^9 \\
T_{10}(x) &= -1 + 50x^2 - 400x^4 + 1120x^6 - 1280x^8 + 512x^{10} \\
T_{11}(x) &= -11x + 220x^3 - 1232x^5 + 2816x^7 - 2816x^9 + 1024x^{11}
\end{aligned}
$$

定理(182)

(181)より明らかに $T_n(x)$ は、n が偶数ならば偶関数で、n が奇数ならば奇関数です。

$$T_n(-x) = (-1)^n T_n(x) \qquad (n \geq 0) \qquad \text{(W3)}$$

(181)に $x=0$ を代入すると、

$$T_0(0) = 1,\quad T_1(0) = 0,\quad T_n(0) = -T_{n-2}(0) \quad (n \geq 2).$$

従って、

$$T_{2m}(0) = (-1)^m, \quad T_{2m+1}(0) = 0 \quad (m \geqq 0) \quad (W4)$$

また、(181)に $x=1$ を代入すると、

$$T_0(1) = 1, \quad T_1(1) = 1, \quad T_n(1) = 2T_{n-1}(1) - T_{n-2}(1) \quad (n \geqq 2)$$

従って、

$$T_n(1) = 1 \qquad (n \geqq 0) \qquad (W5)$$

これを $T_{10}(1)$, $T_{11}(1)$ で確認しましょう。(182)より、

$$T_{10}(1) = -1 + 50 - 400 + 1120 - 1280 + 512 = 1.$$
$$T_{11}(1) = -11 + 220 - 1232 + 2816 - 2816 + 1024 = 1.$$

$-1 \leqq x \leqq 1$ とするとき、$x = \cos\theta$ を満たす θ は $0 \leqq \theta \leqq \pi$ の範囲で一意に定まり、それは、$\theta = \arccos x$ と表わされるから、(180)より、$T_n(x) = \cos(n \arccos x)$. 従って、

$$-1 \leqq x \leqq 1 \text{ ならば } -1 \leqq T_n(x) \leqq 1 \quad (n \geqq 0) \qquad (W6)$$

(W3), .., (W6)を定理としてまとめて再記しておきましょう。

$T_n(x)$ の値に関する若干の命題

- $T_n(-x) = (-1)^n T_n(x) \qquad (n \geqq 0) \qquad .1)$
- $T_{2m}(0) = (-1)^m, \quad T_{2m+1}(0) = 0 \qquad (m \geqq 0) \qquad .2)$
- $T_n(1) = 1 \qquad (n \geqq 0) \qquad .3)$

【P537】11月28日（日） Tchebicheff 多項式（続き）

- $-1 \leqq x \leqq 1$ ならば $-1 \leqq T_n(x) \leqq 1 \quad (n \geqq 0)$ .4)

定理(183)

(179.1)の右辺、

$$(\ast) = \cos(n+m)\theta + \cos(n-m)\theta$$

を、$0 \leqq \theta \leqq \pi$ の区間で積分してみましょう。

$n = m = 0$ のときは、

$$\int_0^\pi (\ast)\,d\theta = \int_0^\pi 2\,d\theta = 2\pi$$

$n = m \neq 0$ のときは、

$$\int_0^\pi (\ast)\,d\theta = \int_0^\pi (\cos 2n\theta + 1)\,d\theta$$

$$= \left[\frac{1}{2n}\sin 2n\theta + \theta\right]_0^\pi = \pi$$

$n \neq m$ のときは、

$$\int_0^\pi (\ast)\,d\theta = \left[\frac{1}{n+m}\sin(n+m)\theta + \frac{1}{n-m}\sin(n-m)\theta\right]_0^\pi = 0$$

従って、

$$\int_0^\pi (\cos(n+m)\theta + \cos(n-m)\theta)\,d\theta = \begin{cases} 2\pi & (n=m=0) \\ \pi & (n=m\neq 0) \\ 0 & (n\neq m) \end{cases} \quad (W7)$$

【P538】Tchebicheff 多項式（続き）

また、$x = \cos\theta$ とすると $dx = -\sin\theta d\theta$ で、$0 \leqq \theta \leqq \pi$ で $\sin\theta \geqq 0$ だから、

$$\int_0^{\pi} \cos n\theta \cos m\theta \, d\theta = \int_{-1}^{1} \frac{T_n(x) T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \qquad \text{(W8)}$$

(179.1), (W7), (W8) より、

$T_n(x)$ の直交性

$$\int_0^{\pi} \cos n\theta \cos m\theta \, d\theta = \begin{cases} \pi & (n = m = 0) \\ \dfrac{\pi}{2} & (n = m \neq 0) \\ 0 & (n \neq m) \end{cases} \qquad .1)$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_n(x) T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} \pi & (n = m = 0) \\ \dfrac{\pi}{2} & (n = m \neq 0) \\ 0 & (n \neq m) \end{cases} \qquad .2)$$

定理(184)

$T_n(x)$ が満たす微分方程式を求めましょう。
定義(180)より、$x = \cos\theta$ とすれば、

$$T_n(x) = \cos n\theta$$

この両辺を θ で微分します。

$$\frac{d}{dx} T_n(x) \cdot (-\sin\theta) = -n \sin n\theta$$

両辺に $-\sin\theta$ を掛けて、

【P539】11月29日（月） Tchebicheff多項式（続き）

$$\sin^2\theta \frac{d}{dx}T_n(x) = n\sin\theta\cdot\sin n\theta \qquad (W9)$$

ところで、

$$\cos(n-1)\theta = \cos n\theta\cdot\cos(-\theta) - \sin n\theta\cdot\sin(-\theta)$$
$$\sin\theta\cdot\sin n\theta = -\cos\theta\cos n\theta + \cos(n-1)\theta \qquad (W10)$$

(W9), (W10)より、

$$\sin^2\theta \frac{d}{dx}T_n(x) = -n\cos\theta\cdot\cos n\theta + n\cos(n-1)\theta$$

$$(1-x^2)T_n'(x) + nxT_n(x) - nT_{n-1}(x) = 0 \qquad (W11)$$

(W11)の両辺をxで微分します。

$$-2xT_n'(x) + (1-x^2)T_n''(x) + nT_n(x) + nxT_n'(x) - nT_{n-1}'(x) = 0$$

$$(1-x^2)T_n''(x) + (n-2)xT_n'(x) + nT_n(x) - nT_{n-1}'(x) = 0. \qquad (W12)$$

(W11)において、$n \to n+1$とすれば、

$$(1-x^2)T_{n+1}'(x) + (n+1)xT_{n+1}(x) - (n+1)T_n(x) = 0 \qquad (W13)$$

(181.2)の両辺をxで微分します。

$$T_{n+1}'(x) - 2T_n(x) - 2xT_n'(x) + T_{n-1}'(x) = 0 \qquad (W14)$$

(181.2), (W11), (W12), (W13), (W14)は、7個の関数 $T_{n+1}(x)$, $T_n(x)$, $T_{n-1}(x)$, $T_{n+1}'(x)$, $T_n'(x)$, $T_{n-1}'(x)$, $T_n''(x)$に関する等式群です。これらから、$T_{n+1}(x)$, $T_{n-1}(x)$, $T_{n+1}'(x)$, $T_{n-1}'(x)$を消去することが出来れば、$T_n(x)$, $T_n'(x)$, $T_n''(x)$だけからなる等式が得られる筈です。

【P540】 Tchebicheff 多項式（続き）

(181.2), (W11), …, (W14) を絵にしましょう。

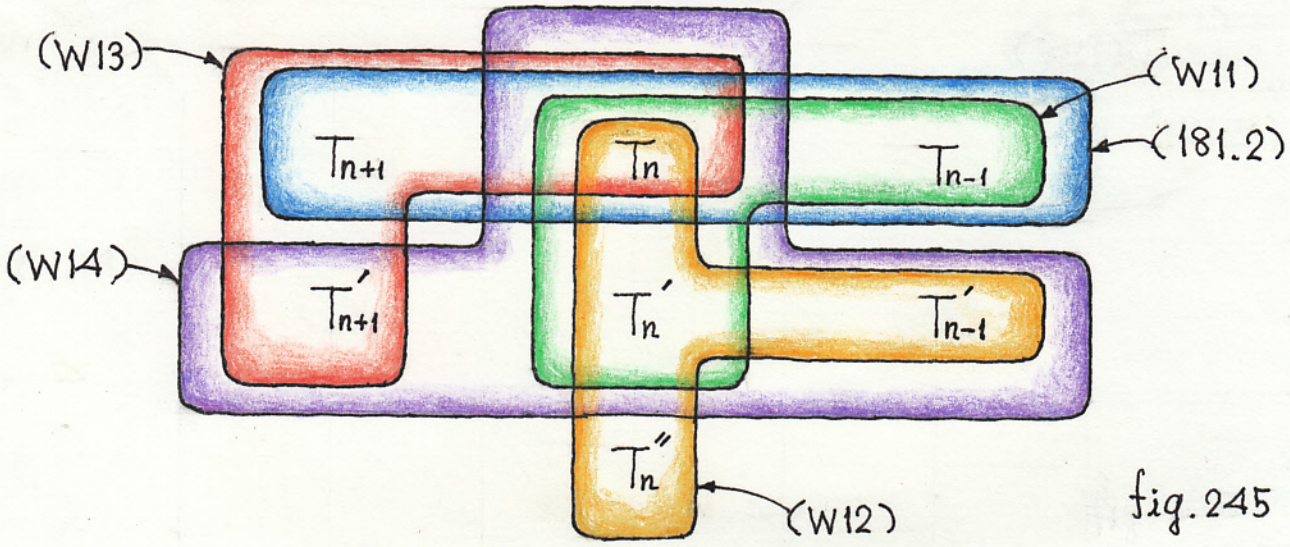

fig.245

(W12) と (W14) から $T'_{n-1}(x)$ を消去すれば、

$$(1-x^2)T''_n(x)-(n+2)xT'_n(x)-nT_n(x)+nT'_{n+1}(x)=0 \qquad \text{(W15)}$$

(181.2) と (W11) から $T_{n-1}(x)$ を消去すれば、

$$(1-x^2)T'_n(x)-nxT_n(x)+nT_{n+1}(x)=0 \qquad \text{(W16)}$$

(W13) と (W16) から $T_{n+1}(x)$ を消去すれば、

$$(n+1)(1-x^2)xT'_n(x)+n(n+1)(1-x^2)T_n(x)$$
$$-n(1-x^2)T'_{n+1}(x)=0 \qquad \text{(W17)}$$

(W15) と (W17) から $T'_{n+1}(x)$ を消去すれば、

$$(1-x^2)^2T''_n(x)-(1-x^2)xT'_n(x)+n^2(1-x^2)T_n(x)=0$$

$$(1-x^2)T''_n(x)-xT'_n(x)+n^2T_n(x)=0 \qquad \text{(W18)}$$

これが求めたかった式です。(W18)は $n\geqq 1$ を（暗に）仮定して導出された訳ですが、$n=0$ の場合でも成り立つのは自明です。

【P541】11月30日(火) Tchebicheff 多項式(続き)

$T_n(x)$ の微分方程式

$$(1-x^2)T_n''(x) - xT_n'(x) + n^2 T_n(x) = 0 \qquad \text{定理(185)}$$

$$T_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} t_{n,m} x^m \qquad \text{(W19)}$$

とします。$t_{n,m}$ の漸化式と境界条件を求めましょう。

$T_n(x)$ は x の n 次の多項式ですから

$$t_{n,m} = 0 \qquad (n < m) \qquad \text{(W20)}$$

(183.2)より、

$$t_{2l,0} = (-1)^l, \quad t_{2l+1,0} = 0 \quad (l \geqq 0) \qquad \text{(W21)}$$

$T_1(x) = x$ より、

$$t_{1,1} = 1 \qquad \text{(W22)}$$

(W20), (W21), (W22) が $t_{n,m}$ の境界条件です。

(181.2)より、

$$T_n(x) - 2xT_{n-1}(x) + T_{n-2}(x) = 0 \qquad (n \geqq 2)$$

これに(W19)を代入すれば

$$\sum_{m=0}^{\infty} t_{n,m} x^m - 2x \sum_{m=0}^{\infty} t_{n-1,m} x^m + \sum_{m=0}^{\infty} t_{n-2,m} x^m = 0$$

$$t_{n,0} + \sum_{m=1}^{\infty} t_{n,m} x^m - \sum_{m=1}^{\infty} 2t_{n-1,m-1} x^m + t_{n-2,0} + \sum_{m=1}^{\infty} t_{n-2,m} x^m = 0$$

【P542】 Tchebicheff多項式（続き）

$$(t_{n,0}+t_{n-2,0})+\sum_{m=1}^{\infty}(t_{n,m}-2t_{n-1,m-1}+t_{n-2,m})x^m=0 .$$

$\{1, x, x^2, x^3, \cdots\}$ は1次独立だから、上式の左辺の x^m の係数は全て0です。従って、次の漸化式が得られます。

$$t_{n,m}=2t_{n-1,m-1}-t_{n-2,m} \quad (n\geqq 2, m\geqq 1) \quad \text{(W23)}$$

(W19), …, (W23)を定理として再記しておきます。

$T_n(x)$ に関する x^m の係数

$$T_n(x)=\sum_{m=0}^{\infty}t_{n,m}x^m \qquad .0)$$

$$t_{n,m}=0 \qquad (n<m) \qquad .1)$$

$$t_{2l,0}=(-1)^l,\quad t_{2l+1,0}=0 \qquad (l\geqq 0) \qquad .2)$$

$$t_{1,1}=1 \qquad .3)$$

$$t_{n,m}=2t_{n-1,m-1}-t_{n-2,m} \qquad (n\geqq 2, m\geqq 1) \qquad .4)$$

定理(186)

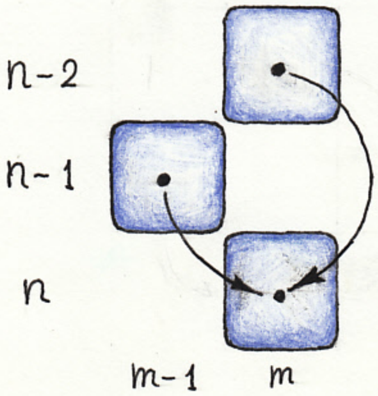

fig. 246

【P543】12月1日(水) Tchebicheff 多項式（続き）

(186)を絵にします。

$$
\begin{pmatrix} T_0 \\ T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \\ T_7 \\ T_8 \\ T_9 \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -3 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & -8 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 5 & 0 & -20 & 0 & 16 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 18 & 0 & -48 & 0 & 32 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -7 & 0 & 56 & 0 & -112 & 0 & 64 & 0 & 0 \\
1 & 0 & -32 & 0 & 160 & 0 & -256 & 0 & 128 & 0 \\
0 & 9 & 0 & -120 & 0 & 432 & 0 & -576 & 0 & 256
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \\ x^5 \\ x^6 \\ x^7 \\ x^8 \\ x^9 \end{pmatrix}
$$

fig.247

上記の行列を $T=(t_{ij})$ と記すことにします。行番号,列番号は 0 から採番されるものとします。T は無限行,無限列から成る下3角行列です。

【P544】12月2日(木) Tchebicheff多項式(続き)

fig.247の行列Tは明らかに正則です。逆行列を持ちます。従って、x^n を $T_0, T_1, T_2, T_3, \cdots$ の1次式で表わすことが出来ます。

$$x^n = \sum_{m=0}^{\infty} \lambda_{n,m} T_m(x) \qquad (n \geqq 0) \qquad \text{(W24)}$$

とします。$\lambda_{n,m}$ の漸化式と境界条件を求めましょう。
$T_0(x) = 1$ だから

$$\lambda_{0,0} = 1 \qquad \text{(W25)}$$

Tは下3角行列だから、その逆行列も下3角行列です。

$$\lambda_{n,m} = 0 \qquad (n < m) \qquad \text{(W26)}$$

(W25),(W26)が $\lambda_{n,m}$ の境界条件です。また、$T_m(1) = 1$ より、

$$\sum_{m=0}^{\infty} \lambda_{n,m} = 1 \qquad (n \geqq 0) \qquad \text{(W27)}$$

$\lambda_{n,m}$ の漸化式を求めます。$T_n(x)$ の漸化式(181.2)と(W24)を用います。

$$\begin{aligned} 2x^n &= 2x \cdot x^{n-1} \qquad (n \geqq 1) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \lambda_{n-1,m} (2x T_m(x)) \\ &= \lambda_{n-1,0} (2x T_0(x)) + \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_{n-1,m} (T_{m+1}(x) + T_{m-1}(x)) \end{aligned}$$

【P545】Tchebicheff 多項式（続き）

$T_0(x) = 1,\ x = T_1(x)$ だから、

$$2x^n = 2\lambda_{n-1,0} T_1(x) + \sum_{m=2}^{\infty} \lambda_{n-1,m-1} T_m(x) + \sum_{m=0}^{\infty} \lambda_{n-1,m+1} T_m(x)$$

$$2x^n = \lambda_{n-1,1} T_0(x) + (2\lambda_{n-1,0} + \lambda_{n-1,2}) T_1(x) + \sum_{m=2}^{\infty} (\lambda_{n-1,m-1} + \lambda_{n-1,m+1}) T_m(x) \qquad \text{(W28)}$$

一方、

$$2x^n = \sum_{m=0}^{\infty} 2\lambda_{n,m} T_m(x) \qquad \text{(W29)}$$

(W28), (W29) より、

$$(2\lambda_{n,0} - \lambda_{n-1,1}) T_0(x) + (2\lambda_{n,1} - 2\lambda_{n-1,0} - \lambda_{n-1,2}) T_1(x) + \sum_{m=2}^{\infty} (2\lambda_{n,m} - \lambda_{n-1,m-1} - \lambda_{n-1,m+1}) T_m(x) = 0 \qquad \text{(W30)}$$

$\{T_0(x), T_1(x), T_2(x), \cdots\}$ は1次独立ですから、(W30)の左辺の全ての $T_m(x)$ $(m = 0, 1, 2, 3\cdots)$ の係数は0です。従って、

$$2\lambda_{n,0} = \lambda_{n-1,1} \qquad (n \geqq 1) \qquad \text{(W31)}$$

$$2\lambda_{n,1} = 2\lambda_{n-1,0} + \lambda_{n-1,2} \qquad (n \geqq 1) \qquad \text{(W32)}$$

$$2\lambda_{n,m} = \lambda_{n-1,m-1} + \lambda_{n-1,m+1} \qquad (n \geqq 1,\ m \geqq 2) \qquad \text{(W33)}$$

この3式が求めたかった $\lambda_{n,m}$ の漸化式です。

【P546】12月3日(金) Tchebicheff 多項式(続き)

(W24), …, (W27), (W31), (W32), (W33) を定理として再記しておきます。

x^n に関する $T_m(x)$ の係数

$$x^n = \sum_{m=0}^{\infty} \lambda_{n,m} T_m(x) \qquad (n \geqq 0) \qquad .0)$$

$$\lambda_{0,0} = 1 \qquad .1)$$

$$\lambda_{n,m} = 0 \qquad (n < m) \qquad .2)$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \lambda_{n,m} = 1 \qquad (n \geqq 0) \qquad .3)$$

$$2\lambda_{n,0} = \lambda_{n-1,1} \qquad (n \geqq 1) \qquad .4)$$

$$2\lambda_{n,1} = 2\lambda_{n-1,0} + \lambda_{n-1,2} \qquad (n \geqq 1) \qquad .5)$$

$$2\lambda_{n,m} = \lambda_{n-1,m-1} + \lambda_{n-1,m+1} \qquad (n \geqq 1,\ m \geqq 2) \qquad .6)$$

定理(187)

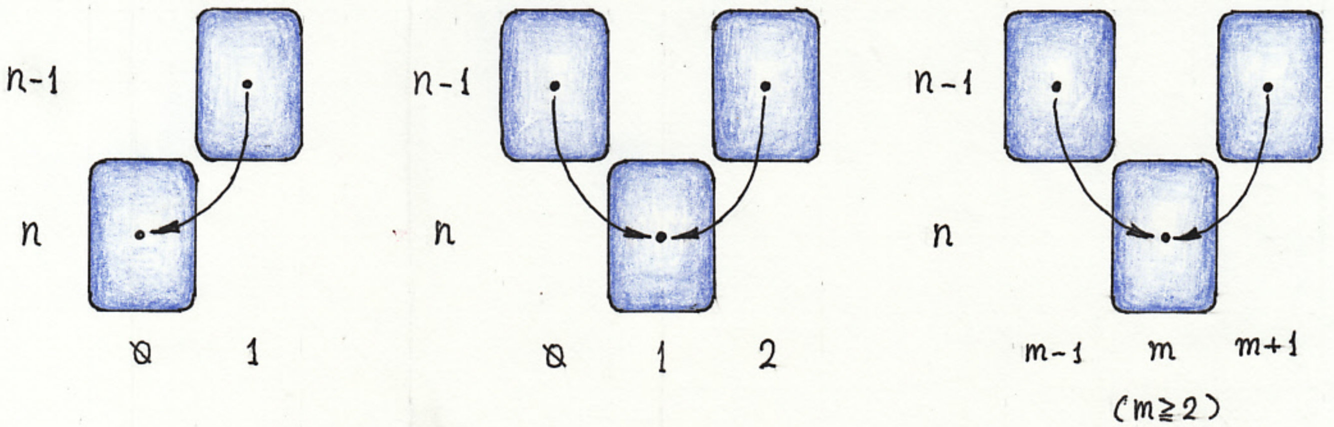

fig.248

【P547】 Tchebicheff 多項式（続き）

(187)を絵にします。

$$
\begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \\ x^5 \\ x^6 \\ x^7 \\ x^8 \\ x^9 \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{3}{8} & 0 & \frac{4}{8} & 0 & \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{10}{16} & 0 & \frac{5}{16} & 0 & \frac{1}{16} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{10}{32} & 0 & \frac{15}{32} & 0 & \frac{6}{32} & 0 & \frac{1}{32} & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{35}{64} & 0 & \frac{21}{64} & 0 & \frac{7}{64} & 0 & \frac{1}{64} & 0 & 0 \\
\frac{35}{128} & 0 & \frac{56}{128} & 0 & \frac{28}{128} & 0 & \frac{8}{128} & 0 & \frac{1}{128} & 0 \\
0 & \frac{126}{256} & 0 & \frac{84}{256} & 0 & \frac{36}{256} & 0 & \frac{9}{256} & 0 & \frac{1}{256}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} T_0 \\ T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \\ T_7 \\ T_8 \\ T_9 \end{pmatrix}
$$

fig.249

上記の行列を $\Lambda = (\lambda_{ij})$ と記すことにします。行，列番号は 0 から採番します。Λ は無限行，無限列から成る下3角行列で、$\Lambda = T^{-1}$ です。

【P548】12月4日（土） Tchebicheff 多項式（続き）

$\lambda_{n,m}$ を直接 n, m で表わす式を求めましょう。それが可能なのです。
但し n, m 共、偶奇に場合分けして表わす式です。
Eulerの公式（W2）を2度用います。

$$2^n(\cos\theta)^n = (e^{i\theta}+e^{-i\theta})^n = e^{in\theta}(1+e^{-i2\theta})^n$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}e^{i(n-2k)\theta} \qquad \text{(W34)}$$

同様に、

$$2^n(\cos\theta)^n = e^{-in\theta}(e^{i2\theta}+1)^n$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}e^{-i(n-2k)\theta} \qquad \text{(W35)}$$

（W34）とW(35)を加え、2で割れば、

$$2^n(\cos\theta)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{e^{i(n-2k)\theta}+e^{-i(n-2k)\theta}}{2}\right)$$

$$2^n(\cos\theta)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos(n-2k)\theta \qquad \text{(W36)}$$

従って、定義（180）より、

$$2^n x^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}T_{n-2k}(x) \qquad (n \geqq 0) \qquad \text{(W37)}$$

但しここで、

$$T_{-l}(x) = T_l(x) \qquad \text{(W38)}$$

この式は単に、$\cos(-l\theta) = \cos(l\theta)$ を別表現しただけのことです。

（W37），（W38）より、

$$2^{2l}x^{2l} = \sum_{k=0}^{2l}\binom{2l}{k}T_{2l-2k}$$

$$= \binom{2l}{0}T_{2l} + \binom{2l}{1}T_{2l-2} + \cdots + \binom{2l}{l-1}T_2 + \binom{2l}{l}T_0$$

$$+ \binom{2l}{2l}T_{-2l} + \binom{2l}{2l-1}T_{-2l+2} + \cdots + \binom{2l}{l+1}T_{-2}$$

$$= 2\sum_{k=0}^{l-1}\binom{2l}{k}T_{2l-2k} + \binom{2l}{l}T_0$$

$$x^{2l} = \frac{1}{2^{2l}}\binom{2l}{l}T_0(x) + \frac{1}{2^{2l-1}}\sum_{k=1}^{l}\binom{2l}{l+k}T_{2k}(x) \qquad \text{(W39)}$$

$$2^{2l+1}x^{2l+1} = \sum_{k=0}^{2l+1}\binom{2l+1}{k}T_{2l+1-2k}$$

$$= \binom{2l+1}{0}T_{2l+1} + \binom{2l+1}{1}T_{2l-1} + \cdots + \binom{2l+1}{l}T_1$$

$$+ \binom{2l+1}{2l+1}T_{-2l-1} + \binom{2l+1}{2l}T_{-2l+1} + \cdots + \binom{2l+1}{l+1}T_{-1}$$

$$x^{2l+1} = \frac{1}{2^{2l}}\sum_{k=0}^{l}\binom{2l+1}{l+k+1}T_{2k+1}(x) \qquad \text{(W40)}$$

（187.0），（W39），（W40）より、

$$\lambda_{2l,0} = \frac{1}{2^{2l}}\binom{2l}{l} \qquad \text{(W41)}$$

$$\lambda_{2l,2k} = \frac{1}{2^{2l-1}}\binom{2l}{l+k} \qquad (k \geq 1) \qquad \text{(W42)}$$

【P550】Tchebicheff 多項式（続き）

$$\lambda_{2l,2k+1} = 0 \tag{W43}$$

$$\lambda_{2l+1,2k+1} = \frac{1}{2^{2l}}\binom{2l+1}{l+k+1} \tag{W44}$$

$$\lambda_{2l+1,2k} = 0 \tag{W45}$$

(W39), …, (W45) を定理として再記しておきます。

$\lambda_{n,m}$ の閉じた表現

$$x^{n} = \sum_{m=0}^{n} \lambda_{n,m} T_m(x) \qquad .0)$$

$$x^{2l} = \frac{1}{2^{2l}}\binom{2l}{l} T_0(x) + \frac{1}{2^{2l-1}}\sum_{k=0}^{l}\binom{2l}{l+k} T_{2k}(x) \qquad .1)$$

$$x^{2l+1} = \frac{1}{2^{2l}}\sum_{k=0}^{l}\binom{2l+1}{l+k+1} T_{2k+1}(x) \qquad .2)$$

$$\lambda_{2l,0} = \frac{1}{2^{2l}}\binom{2l}{l} \qquad .3)$$

$$\lambda_{2l,2k} = \frac{1}{2^{2l-1}}\binom{2l}{l+k} \qquad (k \geqq 1) \qquad .4)$$

$$\lambda_{2l,2k+1} = 0 \qquad .5)$$

$$\lambda_{2l+1,2k+1} = \frac{1}{2^{2l}}\binom{2l+1}{l+k+1} \qquad .6)$$

$$\lambda_{2l+1,2k} = 0 \qquad .7)$$

定理(188)

$T_n(x)$の閉じた表現を求めましょう。そのための良く知られた方法は、

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(x) t^n$$

なる、$T_n(x)$の母関数(Generating Function) $f(t)$の、閉じた式を求め、さらに$f(t)$をtの冪級数に展開し、そのt^nの係数を$T_n(x)$と等置するというものです。しかしこの方法は、長めでしかも煩らわしい計算を行なう必要があります。もっと簡単な、でもちょっと怪しげな方法を試みましょう。$T_n(x)$の漸化式(181.2)を再記します。

$$T_{n+2}(x) - 2x T_{n+1}(x) + T_n(x) = 0 \quad (n \geqq 0) \qquad \text{(W46)}$$

これを満たす$T_n(x)$が2つ存在するとします。それらを${}_1T_n(x)$, ${}_2T_n(x)$とします。任意の定数α, βに対して、

$$(\alpha\,{}_1T_{n+2} + \beta\,{}_2T_{n+2}) - 2x(\alpha\,{}_1T_{n+1} + \beta\,{}_2T_{n+1}) + (\alpha\,{}_1T_n + \beta\,{}_2T_n) = 0$$

を満たします。つまり、$T_n = \alpha\,{}_1T_n + \beta\,{}_2T_n$も(W46)を満たします。このことに留意しておきましょう。また、漸化式(W46)を満たし、かつ、$T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$を満たす$T_n(x)$は、(182)のように一意的に決まります。線形シフト演算子(Linear Shift Operator) Eを次式で定義します。

$$E\,T_n(x) = T_{n+1}(x) \qquad \text{(W47)}$$

Eを用いると、任意のnの関数T_nは、

$$T_n(x) = E^n T_0(x) \qquad \text{(W48)}$$

漸化式(W46)は、Eを用いて表現すると、

$$E^2 T_n(x) - 2x E\,T_n(x) + T_n(x) = 0 \qquad (n \geqq 0)$$

【P552】Tchebicheff 多項式（続き）

$$(E^2 - 2xE + 1)T_n(x) = 0 \qquad (n \geqq 0)$$

$$E^2 - 2xE + 1 = 0 \tag{W49}$$

これはEの2次方程式です。その解は、

$$E = x \pm i\sqrt{1-x^2} \tag{W50}$$

そこで、

$$_{+}E = x + i\sqrt{1-x^2},\quad _{-}E = x - i\sqrt{1-x^2} \tag{W51}$$

とおけば、

$$\begin{aligned} {}_{+}T_n(x) &= {}_{+}E^n T_0(x) = (x + i\sqrt{1-x^2})^n \\ {}_{-}T_n(x) &= {}_{-}E^n T_0(x) = (x - i\sqrt{1-x^2})^n \end{aligned} \tag{W52}$$

${}_{+}T_n(x)$, ${}_{-}T_n(x)$ は共に漸化式（W46）を満たします。従って、任意の定数 α, β に対して、

$$T_n(x) = \alpha\,{}_{+}T_n(x) + \beta\,{}_{-}T_n(x) \tag{W53}$$

上記の $T_n(x)$ も（W46）を満たします。（W53）の $T_n(x)$ に対して、$T_0(x) = 1$, かつ、$T_1(x) = x$ を満たす定数 α, β が存在すれば、$T_n(x)$ の一意性より、その α, β を代入した（W53）の $T_n(x)$ が求めたかった $T_n(x)$ ということになります。

$$\begin{aligned} T_0(x) &= \alpha\cdot 1 + \beta\cdot 1 = 1 \\ T_1(x) &= (\alpha+\beta)x + i(\alpha-\beta)\sqrt{1-x^2} = x \end{aligned} \tag{W54}$$

【P553】Tchebicheff 多項式（続き）

(W54) より、

$$\alpha = \beta = \frac{1}{2} \qquad \text{(W55)}$$

(W52), (W53), (W55) より

$T_n(x)$ の閉じた表現

$$T_n(x) = \frac{1}{2}\left(\left(x + i\sqrt{1-x^2}\right)^n + \left(x - i\sqrt{1-x^2}\right)^n \right) \qquad \text{定理(189)}$$

$T_2(x)$, $T_3(x)$ を (189) 式で計算し、その正しさを確認してみましょう。

$$\begin{aligned}
2T_2(x) &= \left(x + i\sqrt{1-x^2}\right)^2 + \left(x - i\sqrt{1-x^2}\right)^2 \\
&= x^2 + 2ix\sqrt{1-x^2} - (1-x^2) \\
&\quad + x^2 - 2ix\sqrt{1-x^2} - (1-x^2) \\
&= 4x^2 - 2 \\
T_2(x) &= 2x^2 - 1.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2T_3(x) &= \left(x + i\sqrt{1-x^2}\right)^3 + \left(x - i\sqrt{1-x^2}\right)^3 \\
&= x^3 + 3ix^2\sqrt{1-x^2} - 3x(1-x^2) - i(1-x^2)^{\frac{3}{2}} \\
&\quad + x^3 - 3ix^2\sqrt{1-x^2} - 3x(1-x^2) + i(1-x^2)^{\frac{3}{2}} \\
&= 8x^3 - 6x \\
T_3(x) &= 4x^3 - 3x.
\end{aligned}$$

これらは (182) の $T_2(x)$, $T_3(x)$ と一致します。 それにしても、$T_n(x)$ の閉じた表現に虚数単位 i や $\sqrt{\ }$ が登場するのは ちょっと不思議ですね。

【P554】12月7日（火） Tchebicheff多項式（続き）

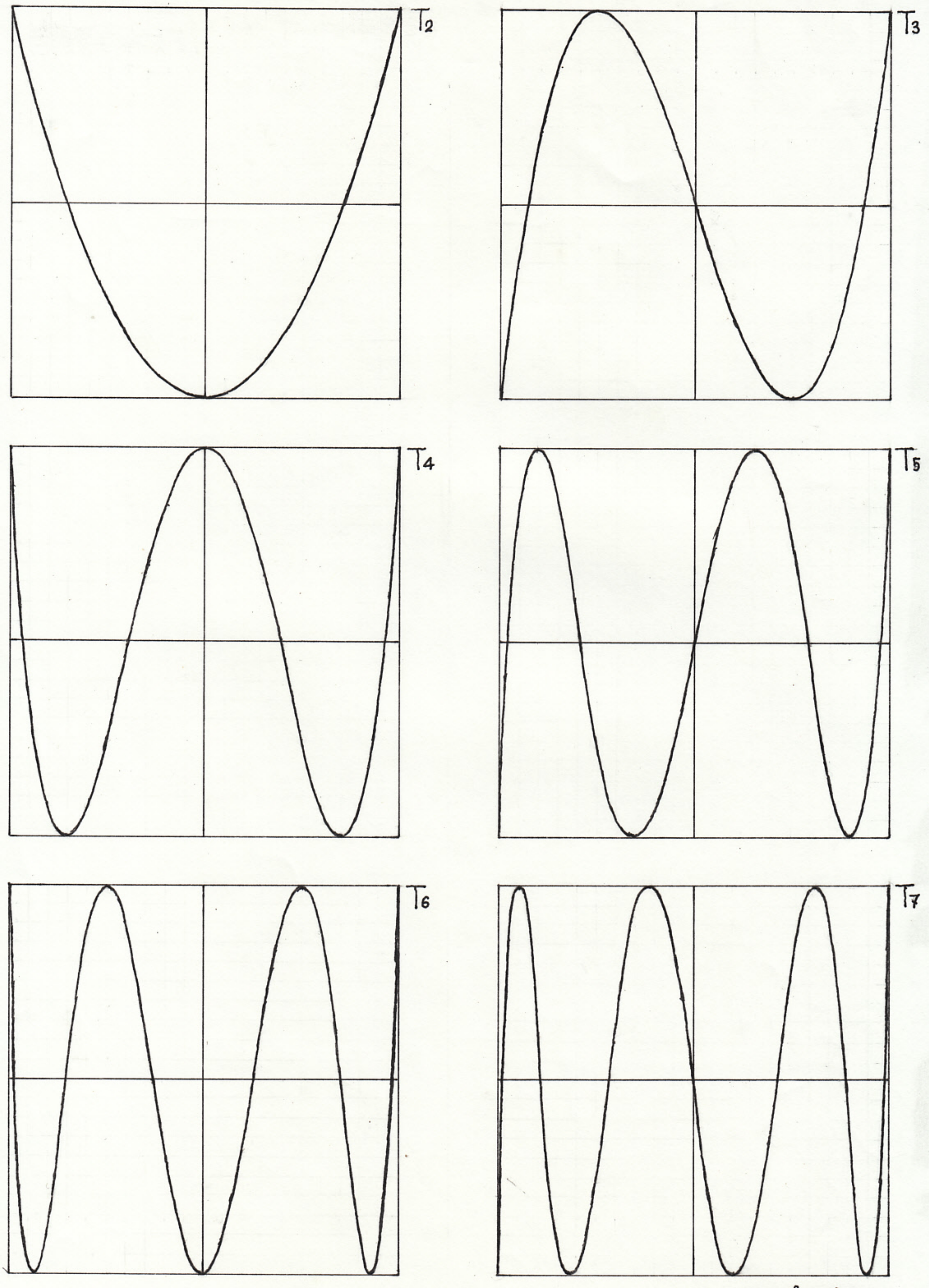

fig.250

【P555】12月11日（土） 小休止：喝采

● 小休止：喝采

喝采

1972 中村泰士 作曲

fig.251