【P525】2021年11月18日(木) 2項係数のある性質

● 2項係数のある性質

2項係数 $\binom{n}{m}$ は2つの非負整数 n, m で定まる非負整数ですが、これに新たな正整数 P を変数として追加し、拡張した量 ${}_nC_m^P$ を定義しましょう。

拡張2項係数の定義

P を1以上の整数、m, n を0以上の整数とします。
${}_nC_m^P$ を次式で定義します。

$$
{}_nC_m^P = \begin{cases} \dfrac{(Pn)!}{P^{n-m}(n-m)!(Pm)!} & (m \leqq n) \\ 0 & (m > n) \end{cases} \quad .1)
$$

特に $P=1$ のときは、

$$
{}_nC_m^1 = \binom{n}{m} = \begin{cases} \dfrac{n!}{(n-m)!\,m!} & (m \leqq n) \\ 0 & (m > n) \end{cases} \quad .2)
$$

定義(176)

例として、${}_3C_m^2$ を計算してみます。

$$
{}_3C_0^2 = \frac{6!}{2^3 \cdot 3!\,0!} = 15, \quad {}_3C_1^2 = \frac{6!}{2^2 \cdot 2! \cdot 2!} = 45,
$$

$$
{}_3C_2^2 = \frac{6!}{2^1 \cdot 1! \cdot 4!} = 15, \quad {}_3C_3^2 = \frac{6!}{2^0 \cdot 0! \cdot 6!} = 1 .
$$

【P526】11月20日（土）２項係数のある性質（続き）

$_nC_m^P$ と δ_{nm}

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{m+k}\,{}_nC_k^P\,{}_kC_m^P = \delta_{nm} \qquad .1)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{m+k}\binom{n}{k}\binom{k}{m} = \delta_{nm} \qquad .2)$$

定理（177）

.1）を証明します。$_nC_k^P$ は $k>n$ ならば 0 となり、$_kC_m^P$ は $k<m$ ならば 0 となります。従って左辺の和は $m \leqq k \leqq n$ なる k についてだけとれば良いことになります。$m>n$ ならばそのような k は存在しないので、左辺は 0 です。$m=n$ ならば $k=n$ で、$_nC_n^P=1$ だから、左辺は 1 です。問題は $m<n$ の場合です。計算しましょう。

$$\text{左辺} = \sum_{k=m}^{n}(-1)^{m+k}\frac{(Pn)!}{P^{n-k}(n-k)!(Pk)!}\cdot\frac{(Pk)!}{P^{k-m}(k-m)!(Pm)!}$$

$$= \frac{(Pn)!}{P^{n-m}(n-m)!(Pm)!}\sum_{k=m}^{n}(-1)^{k-m}\frac{(n-m)!}{(n-k)!(k-m)!}$$

$$= {}_nC_m^P\sum_{l=0}^{n-m}(-1)^{l}\frac{(n-m)!}{(n-m-l)!\,l!}$$

$$= {}_nC_m^P\sum_{l=0}^{n-m}(-1)^{l}\binom{n-m}{l}$$

$$= {}_nC_m^P\cdot(1-1)^{n-m} \qquad \left(\because\ (1+x)^n=\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}x^l\right)$$

$$= 0.$$

Q.E.D.

【P527】２項係数のある性質（続き）

定理(177)は、${}_nC^P_m$を行列のn行m列成分と解釈すれば、右辺は単位行列ですから、下３角行列とその逆行列との積と見做せます。但し、行番号,列番号は１からではなく０から採番するものとします。無限行,無限列の行列ですが、下３角行列ですから、任意のnに対して、n×nの正方行列として止めてもその部分は不変です。絵にしましょう。

P = 2

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 15 & 45 & 15 & 1 & 0 & 0 \\ 105 & 420 & 210 & 28 & 1 & 0 \\ 945 & 4725 & 3150 & 630 & 45 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -15 & 45 & -15 & 1 & 0 & 0 \\ 105 & -420 & 210 & -28 & 1 & 0 \\ -945 & 4725 & -3150 & 630 & -45 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 15 & -45 & 15 & -1 & 0 & 0 \\ 105 & -420 & 210 & -28 & 1 & 0 \\ 945 & -4725 & 3150 & -630 & 45 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 15 & -45 & 15 & -1 & 0 & 0 \\ 105 & -420 & 210 & -28 & 1 & 0 \\ 945 & -4725 & 3150 & -630 & 45 & -1 \end{pmatrix}$$

fig.241.2

【P528】2項係数のある性質（続き）

$P = 1$

$$
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & 0 \\
1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1
\end{pmatrix}^{-1}
=
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 3 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 \\
-1 & 5 & -10 & 10 & -5 & 1 & 0 \\
1 & -6 & 15 & -20 & 15 & -6 & 1
\end{pmatrix}
$$

.1

$$
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & -3 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 \\
1 & -5 & 10 & -10 & 5 & -1 & 0 \\
1 & -6 & 15 & -20 & 15 & -6 & 1
\end{pmatrix}^{-1}
=
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & -3 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 \\
1 & -5 & 10 & -10 & 5 & -1 & 0 \\
1 & -6 & 15 & -20 & 15 & -6 & 1
\end{pmatrix}
$$

fig.242.2

fig.241.2とfig.242.2式は興味深いですね。どちらもその逆行列が自分自身と一致します。しかも任意のnに対して$n \times n$行列がそれを満たすのです。さらに任意の正整数Pに対してそうなのです。つまり、$A^{-1} = A$となる$n \times n$行列を無限個見い出したことになります。

それにしても、${}_nC_m^P$は常に整数なのでしょうか？　気になりませんか？

【P529】11月21日(日) 2項係数のある性質(続き)

定理(177)と、その意味論的な説明図とでも云い得る fig.241, fig.242 より、次が成り立つのは自明です。

${}_nC^p_m$ と変換

f_n, g_n を非負整数 n の関数とします。次が成り立ちます。

$$f_n = \sum_{m=0}^{\infty} {}_nC^p_m\, g_m \iff g_n = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{n+m}\, {}_nC^p_m\, f_m \qquad .1)$$

$$f_n = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m\, {}_nC^p_m\, g_m \iff g_n = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m\, {}_nC^p_m\, f_m \qquad .2)$$

$$f_n = \sum_{m=0}^{\infty} \binom{n}{m} g_m \iff g_n = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{n+m} \binom{n}{m} f_m \qquad .3)$$

$$f_n = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \binom{n}{m} g_m \iff g_n = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \binom{n}{m} f_m \qquad .4)$$

定理(178)

定理(178.3), .4)が当節で呈示したかった主たる命題です。特に .3)がそうです。これらは、2項係数が登場する様様な恒等式たちを生産してくれるはずです。簡単な例を上げましょう。

$$(1+x)^n = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} x^m \implies x^n = \sum_{m=0}^{n} (-1)^{n+m} \binom{n}{m} (1+x)^m$$

$x = 1, 2$ を代入すれば

$$\sum_{m=0}^{n} (-1)^{n+m} \binom{n}{m} 2^m = 1, \qquad \sum_{m=0}^{n} (-1)^{n+m} \binom{n}{m} 3^m = 2^n$$

これはほとんど自明な恒等式ですね。

● 小休止：Bérénice

Bérénice

Jean Racine

Hé bien! régnez, cruel; contentez votre gloire:
Je ne dispute plus. J'attendais, pour vous croire,
Que cette même bouche, après mille serments
D'un amour qui devait unir tous nos moments,
Cette bouche, à mes yeux s'avouant infidèle,
M'ordonnât elle-même une absence éternelle.
Moi-méme j'ai voulu vous entendre en ce lieu.
Je n'écoute plus rien; et pour jamais, adieu.
Pour jamais! Ah! Seigneur, songez-vous en vous-
même
Combien ce mot cruel est affreux quand on aime?
Dans un mois, dans un an, comment souffrirons-nous,
Seigeur, que tant de mers me séparent de vous?
Que le jour recommence, et que le jour finisse,
Sans que jamais Titus puisse voir Bérénice,
Sans que de tout le jour je puisse voir Titus?
Mais quelle est mon erreur, et que de soins perdus!
L'ingrat, de mon départ consolé par avance,
Daignera-t-il compter les jours de mon absence?
Ces jours si longs pour moi lui sembleront trop courts.

fig. 243

ベレニス

ジャン・ラシーヌ
（1639～1699）

それならば君臨なさいませ残酷な方！栄光の望みを充たされませ。
もはや争いませぬ。陛下の心を知るために待っていたのです
その同じ口，あらゆるわれらの時を結びつけるべき
愛をいくどもお誓いになったあとで
その口がわたしの前で不実であることを白状し，
永遠に立ち去るようご命じになることを。
わたし自身がこの場所で陛下のお言葉を聞きたかったのです。
もはや何もお聞きいたしませぬ。永久にお別れを。
永久に！ああ！陛下，ご自分のうちでお考えになりましたか。
この残酷な言葉が愛する時にどんなに恐ろしいものか。
1か月後1年後にどうやってわたしたちは耐えるのでしょう
陛下，これほど多くの海がわたしと陛下をへだつのを，
日がまた昇り日が沈むのを
ティテュスがベレニスに会うことも能わず
一日じゅうわたしがティテュスに会うこともかなわず…
でも私の誤りは何でしょう，何と多くの心づかいが失われたことか。
情け知らず，もうあらかじめわたしの出発の苦しみが慰められて
わたしの不在の日日を数えてくださる気になるのでしょうか。
わたしにとってそれほど長い日日も短すぎるとお思いになるのでしょう。

fig.244