● n次元単体の定義

『n次元単体の呈示』では、n次元単体に関する(特に4面体に関する)もろもろの問題呈示(例えば、n次元球, n-1次元球たちとの関係)を行ないましたが、n次元単体の定義そのものについては後述とし、仄めかしただけでした。でも、n次元単体と密接な関係にあるn次元平行体については『n次元平行体の呈示』で3通りの定義を行ないました。ここで、n次元単体に関しても複数通りの定義を行ないましょう。単にn次元単体と呼ぶときは、n次元平面単体を意味するものとします。n次元球面単体も存在する(定義し得る)ことに注意しましょう。2次元平面単体は平面3角形で、2次元球面単体は球面3角形です。n次元球面単体は、n次元平面単体やn+1次元平面単体と密接な関係にあると思われます。例えば、平面3角形は無限小球面3角形と見做せることは既に示した通りです。また、4面体の各頂点における立体角は単位球面3角形の面積と一致します。

まず、n次元平行体の3つの定義に対応する、n次元(平面)単体の定義を行ないましょう。

---

n次元単体の定義(その1)

n次元またはそれ以上の次元Nのユークリッド空間(アファイン空間) R^N 上の、1点 A_0 と、n個のベクトルの集合 $\{v_1, v_2, v_3, \cdots, v_n\}$ に対して、次式で定まる、R^N 上の部分集合 $\mathcal{S}_n(A_0; v_1, v_2, v_3, \cdots, v_n)$ のことをn次元(平面)単体と呼びます。点 A_0 のことを始頂点と呼び、$\{v_1, v_2, v_3, \cdots, v_n\}$ のことを、始頂点 A_0 に関する単体要素集合と呼ぶことにします。

【P446】n次元単体の定義（続き）

$$\mathcal{S}_n(A_0; v_1, v_2, v_3, \cdots, v_n) = \left\{ x \in R^N \;\middle|\; x = A_0 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i,\ 0 \leqq \lambda_i \leqq 1\ (i = 1, 2, 3, \cdots, n),\ 0 \leqq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \leqq 1 \right\} \quad .1)$$

単体要素集合$\{v_1, v_2, v_3, \cdots, v_n\}$が1次独立であるとき、$\mathcal{S}_n$を縮退していない$n$次元単体と呼び、そうでないとき縮退した$n$次元単体と呼びます。下記で表わされる点

$$A_0,\quad A_i = A_0 + v_i \quad (i = 1, 2, 3, \cdots, n) \quad .2)$$

を$\mathcal{S}_n$の頂点と呼びます。始頂点A_0も$\mathcal{S}_n$の頂点の1つです。$\mathcal{S}_n$は$n+1$個の頂点を持つことになります。

定義（136）

この定義（136）は、n次元平行体の定義（4）とそっくりですね。違いはただ1つ、新たに付け加えた次の条件式だけです。

$$0 \leqq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \leqq 1$$

たったこれだけを加えただけで、n次元単体を圧倒的に興味深く魅力的な幾何学的実体（少なくとも僕にとっては）にしていると考えると不思議な気分にさせられます。

定義（136）の始頂点A_0は一見すると、他のn個の頂点たちとは異なる特別な頂点に見えるかもしれません。しかし、そうではありません。次の定理が成り立つからです。

【P447】8月25日(水) n次元単体の定義(続き)

A_0を始頂点とし、$\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$を単体要素集合とし、(136.1)で定まる$n$次元単体$\mathcal{S}_n(A_0; v_1, v_2, \cdots, v_n)$を単に$\mathcal{S}_n$と略記します。

$$\mathcal{S}_n = \mathcal{S}_n(A_0; v_1, v_2, \cdots, v_n) \qquad .1)$$

(136.2)で定まる、$\mathcal{S}_n$の頂点の集合を$\mathcal{A}$と記すことにします。

$$\mathcal{A} = \{A_0,\ A_i = A_0 + v_i \ (i = 1, 2, \cdots, n)\} \qquad .2)$$

自然数$i_0 \in \{1, 2, \cdots, n\}$を任意に選び固定します。$i_0$を用いて$A_0'$, $\{v_1', v_2', \cdots, v_n'\}$を次のように定めます。

$$A_0' = A_{i_0} = A_0 + v_{i_0} \qquad .3)$$

$$v_i' = \begin{cases} -v_{i_0} & (i = i_0) \\ v_i - v_{i_0} & (i \neq i_0) \end{cases} \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \qquad .4)$$

A_0'を始頂点とし、$\{v_1', v_2', \cdots, v_n'\}$を単体要素集合とし、(136.1)で定まる$n$次元単体$\mathcal{S}_n(A_0'; v_1', v_2', \cdots, v_n')$を単に$\mathcal{S}_n'$と略記します。

$$\mathcal{S}_n' = \mathcal{S}_n(A_0'; v_1', v_2', \cdots, v_n') \qquad .5)$$

$n+1$個の点の集合$\mathcal{A}'$を次のように定めます。

$$\mathcal{A}' = \{A_0',\ A_i' = A_0' + v_i' \ (i = 1, 2, \cdots, n)\} \qquad .6)$$

このとき、下記が成り立ちます。

$$\mathcal{S}_n = \mathcal{S}_n' \qquad .7)$$

$$\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}\text{が1次独立} \Longleftrightarrow \{v_1', v_2', \cdots, v_n'\}\text{が1次独立} \qquad .8)$$

【P448】n次元単体の定義（続き）

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}' \qquad .9)$$

定理(137)

この定理の言はんとしていることは明らかですね。証明しましょう。
証明すべきは.7), .8), 9)です。どれも集合に関する命題ですからちょっと厄介です。

まず .7) $\mathcal{S}_n = \mathcal{S}_n'$ を証明します。

次が成り立ちます。

2つの実数の集合 $\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$, $\{\lambda_1', \lambda_2', \cdots, \lambda_n'\}$ に対して

$$\lambda_i' = \begin{cases} 1 - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j & (i = i_0) \\ \lambda_i & (i \neq i_0) \end{cases} \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\lambda_i = \begin{cases} 1 - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j' & (i = i_0) \\ \lambda_i' & (i \neq i_0) \end{cases} \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

(W1)

(W1)は対称的な構造をしています。つまり、上の式と下の式は同じ形をしています。従って、($\Longrightarrow$)を示せば十分です。

$i = i_0$ のとき： $\lambda_{i_0}' = 1 - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1 - \lambda_{i_0} - \sum_{j \neq i_0} \lambda_j$

$$= 1 - \lambda_{i_0} - \sum_{j \neq i_0} \lambda_j'$$

$$\therefore \lambda_{i_0} = 1 - \lambda_{i_0}' - \sum_{j \neq i_0} \lambda_j' = 1 - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j'$$

$i \neq i_0$ のとき： $\lambda_i' = \lambda_i \quad \therefore \lambda_i = \lambda_i'$ //

【P449】8月26日(木) n次元単体の定義(続き)

次が成り立ちます。

(W1)の関係にある$\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$, $\{\lambda'_1, \lambda'_2, \cdots, \lambda'_n\}$に対して、

$$\left\{ 0 \leqq \lambda_i \leqq 1 \ (i = 1, 2, \cdots, n), \quad 0 \leqq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \leqq 1 \right\}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\left\{ 0 \leqq \lambda'_i \leqq 1 \ (i = 1, 2, \cdots, n), \quad 0 \leqq \sum_{i=1}^{n} \lambda'_i \leqq 1 \right\}$$

(W2)

(W1), (W2)は共に対称的な構造をしていますから、($\Longrightarrow$)を示せば十分です。

$0 \leqq \lambda'_i \leqq 1 \ (i = 1, 2, \cdots, n)$は自明です。$0 \leqq \sum_{i=1}^{n} \lambda'_i \leqq 1$を示します。

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda'_i = \lambda'_{i_0} + \sum_{i \neq i_0} \lambda'_i$$

$$= 1 - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i + \sum_{i \neq i_0} \lambda_i = 1 - \lambda_{i_0}$$

$$\therefore \ 0 \leqq \sum_{i=1}^{n} \lambda'_i \leqq 1$$

//

次が成り立ちます。

(W1)の関係にある$\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$, $\{\lambda'_1, \lambda'_2, \cdots, \lambda'_n\}$に対して、

$$A'_0 + \sum_{i=1}^{n} \lambda'_i v'_i = A_0 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$$

(W3)

計算します。

【P450】8月27日(金) n次元単体の定義(続き)

$$
\begin{aligned}
& A_0' + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i' v_i' \\
&= A_0 + v_{i_0} + \lambda_{i_0}' v_{i_0}' + \sum_{i \neq i_0} \lambda_i' v_i' \\
&= A_0 + v_{i_0} + \left(1 - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)(-v_{i_0}) + \sum_{i \neq i_0} \lambda_i (v_i - v_{i_0}) \\
&= A_0 + v_{i_0} - v_{i_0} + \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right) v_{i_0} + \sum_{i \neq i_0} \lambda_i v_i - \left(\sum_{i \neq i_0} \lambda_i\right) v_{i_0} \\
&= A_0 + \lambda_{i_0} v_{i_0} + \sum_{i \neq i_0} \lambda_i v_i = A_0 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \qquad //
\end{aligned}
$$

(W2),(W3)より、$\mathcal{S}_n' \subset \mathcal{S}_n$ かつ $\mathcal{S}_n \subset \mathcal{S}_n'$. よって $\mathcal{S}_n = \mathcal{S}_n'$. //

8)を証明します。次が成り立ちます。これは自明です。

$$
v_i' = \begin{cases} -v_i & (i = i_0) \\ v_i - v_{i_0} & (i \neq i_0) \end{cases} \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)
$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$
v_i = \begin{cases} -v_i' & (i = i_0) \\ v_i' - v_{i_0}' & (i \neq i_0) \end{cases} \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)
$$

(W4)

(W4)も対称的な構造をしていますね. 従って、8)は($\Longrightarrow$)を示せば十分です。$\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ が1次独立だとしましょう。

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i' v_i' = \mathbf{0} \qquad \text{(W5)}$$

が成り立つと仮定します。(W5)を $v_1, v_2, \cdots, v_n$ で表現しましょう。

$$\mathbf{0} = \mu_{i_0}' v_{i_0}' + \sum_{i \neq i_0} \mu_i' v_i' = -\mu_{i_0}' v_{i_0} + \sum_{i \neq i_0} \mu_i' (v_i - v_{i_0})$$

【P451】8月28日(土) n次元単体の定義(続き)

$$0 = -\mu'_{i_0} v_{i_0} + \sum_{i \neq i_0} \mu'_i v_i - \Big(\sum_{i \neq i_0} \mu'_i\Big) v_{i_0}$$

$$0 = \Big(-\sum_{i=1}^{n} \mu'_i\Big) v_{i_0} + \sum_{i \neq i_0} \mu'_i v_i \qquad \text{(W6)}$$

$\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$は1次独立だから、(W6)の右辺の$v_1, v_2, \cdots, v_n$の係数は全て0です。従って、

$$\mu'_i = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \qquad \text{(W7)}$$

(W5), (W7)より、$\{v'_1, v'_2, \cdots, v'_n\}$も1次独立です。〃

余談になりますが、次が成り立ちます。これは自明ですね。

2つの実数の集合$\{\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n\}$, $\{\mu'_1, \mu'_2, \cdots, \mu'_n\}$に対して、

$$\mu'_i = \begin{cases} -\sum_{j=1}^{n} \mu_j & (i = i_0) \\ \mu_i & (i = i_0) \end{cases} \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\mu_i = \begin{cases} -\sum_{j=1}^{n} \mu'_j & (i = i_0) \\ \mu'_i & (i \neq i_0) \end{cases} \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \qquad .1)$$

.1)の関係にある$\{\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n\}$, $\{\mu'_1, \mu'_2, \cdots, \mu'_n\}$に対して

$$\mu_i = 0 \ (i = 1, 2, \cdots, n) \Longleftrightarrow \mu'_i = 0 \ (i = 1, 2, \cdots, n) \qquad .2)$$

(W8)

(W1), (W4)と同様に、(W8.1)も対称的な構造をした線形変換です。つまり、どの変換もその逆変換に一致します。面白いですね。

【P452】 n次元単体の定義（続き）

（137.9）$\mathcal{S}' = \mathcal{S}$ を示します。ほとんど自明ですね。

$A_0' = A_{i_0}$, $A_{i_0}' = A_0' + v_{i_0}' = A_0 + v_{i_0} - v_{i_0} = A_0$

$i \neq 0, i_0$ のとき：$A_i' = A_0' + v_i' = A_0 + v_{i_0} + v_i - v_{i_0} = A_i$.

A_0 と A_{i_0} が入れ替わるだけです。従って $\mathcal{S}' = \mathcal{S}$. 〃　Q.E.D.

n次元単体の定義（その2）

n次元またはそれ以上の次元Nのユークリッド空間（アファイン空間）R^N上の、唯1点A_0からなる集合$\mathcal{S}_0(A_0;) = \{A_0\}$を0次元（平面）単体と呼びます。点$A_0$を始頂点，または単に頂点と呼びます。

$n-1 \geqq 0$なる$n-1$に対して、$n-1$次元（平面）単体$\mathcal{S}_{n-1}(A_0; v_1, v_2, v_3, \cdots, v_{n-1})$が定義されていると仮定します。$\{v_1, v_2, v_3, \cdots, v_{n-1}\}$は、$R^N$に付随するベクトル空間$V^N$上の$n-1$個のベクトルの集合です。この$\mathcal{S}_{n-1}$及び$v_n \in V^N$に対して、次式で定まる$R^N$上の集合$\mathcal{S}_n$を$n$次元（平面）単体と呼びます。

$$\mathcal{S}_n(A_0; v_1, v_2, v_3, \cdots, v_n) = \left\{ x \in R^N \;\middle|\; \begin{array}{l} x = \mu y + (1-\mu) A_n, \\ 0 \leqq \mu \leqq 1, \\ A_n = A_0 + v_n, \\ y \in \mathcal{S}_{n-1}(A_0; v_1, v_2, v_3, \cdots, v_{n-1}) \end{array} \right\} \quad .1)$$

A_0を始頂点と呼び、$\{v_1, v_2, v_3, \cdots, v_n\}$を始頂点$A_0$に関する単体要素集合と呼びます。

単体要素集合$\{v_1, v_2, v_3, \cdots, v_n\}$が1次独立であるとき、$\mathcal{S}_n$を

 n次元単体の定義(続き)

縮退していないn次元単体と呼び、そうでないとき縮退したn次元単体と呼びます。下記で表わされる点

$$A_0,\ A_i = A_0 + v_i\ (i=1,2,3,\cdots,n) \qquad .2)$$

を$\mathcal{S}_n$の頂点と呼びます。始頂点A_0も頂点の1つです。$\mathcal{S}_n$は$n+1$個の頂点を持つことになります。

定義(138)

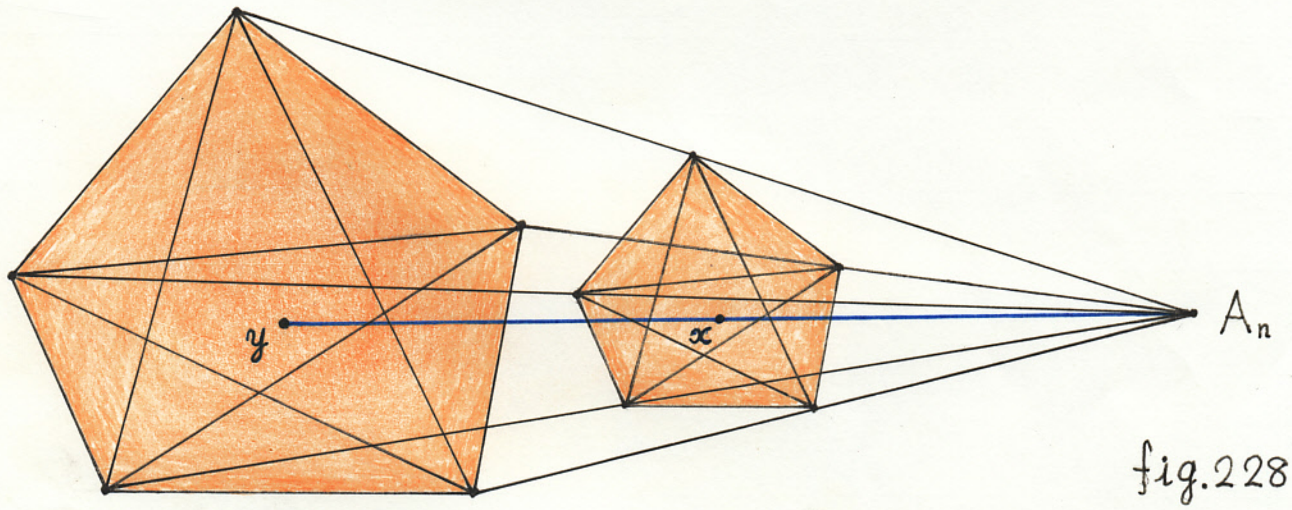


fig.228

定義(136)と定義(138)が同値であることを証明しましょう。

同一のA_0, $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$に対し、(136)で定義される$\mathcal{S}_n(A_0; v_1, v_2, \cdots, v_n)$を単に$\mathcal{S}_n$と記し、(138)で定義される$\mathcal{S}_n(A_0; v_1, v_2, \cdots, v_n)$を単に$\mathcal{S}_n'$と記すことにします。全ての非負整数$n$に対して$\mathcal{S}_n$と$\mathcal{S}_n'$が集合として同一であることを示せば、(136)と(138)が同値であることを示したことになります。

(138)ではnに関する数学的帰納法を用いて$\mathcal{S}_n'$を定義しているので、証明でも数学的帰納法を用いることにします。それ以外の証明方法は思い付きません。おそらく存在しないのでしょう。

$\mathcal{S}_0 = \{A_0\} = \mathcal{S}_0'$です。

【P454】 8月31日(火) n次元単体の定義(続き)

$n-1 \geqq 0$なる整数nに対して$\mathcal{S}_{n-1} = \mathcal{S}'_{n-1}$を仮定して、$\mathcal{S}_n = \mathcal{S}'_n$を示します。

(136.1)のxは、$\lambda_n = 1$のとき$x = A_n$です。同様に、(138.1)のxは、$\mu = 0$のとき$x = A_n$です。よって、$A_n \in \mathcal{S}_n$かつ$A_n \in \mathcal{S}'_n$です。

以下では、$\lambda_n \neq 1$なる(136.1)のx, $\mu \neq 0$なる(138.1)のxに関してのみ議論することにします。それで十分だからです。

次が成り立ちます。

$\lambda_n \neq 1$, $\mu \neq 0$とします。2つの、実数の集合$\{\mu, \nu_1, \nu_2, \nu_3, \cdots, \nu_{n-1}\}$, $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \cdots, \lambda_n\}$に対して、

$$\lambda_i = \begin{cases} \mu\nu_i & (i = 1, 2, 3, \cdots, n-1) \\ 1-\mu & (i = n) \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\mu = 1 - \lambda_n,$$

$$\nu_i = \frac{\lambda_i}{1-\lambda_n} \quad (i = 1, 2, 3, \cdots, n-1) \tag{W9}$$

これは自明です。暗算(Mental Arithmetic)できます。

$\lambda_n = 1$, $\mu = 0$を例外扱いした理由は明らかですね。$(1-\lambda_n)$が分母(Denominator)に用いられる式が出現するからです。(W1)や(W4)とは異なり、(W9)は線形変換ではありません。

僕は初め、(W9)を証明に用いることに戸惑いました。その訳は、

$$\frac{\lambda_i}{1-\lambda_n} \leqq 1 \quad (i = 1, 2, 3, \cdots, n-1)$$

が成り立つはずがないと思い込んでしまったからです。

次が成り立ちます。

(W9)の関係にある $\{\mu, \nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_{n-1}\}$, $\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$ に対して.

$$\left\{ 0 < \mu \leqq 1, \quad 0 \leqq \sum_{i=1}^{n-1} \nu_i \leqq 1, \quad 0 \leqq \nu_i \leqq 1 \ (i = 1, 2, \cdots, n-1) \right\}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\left\{ 0 \leqq \lambda_n < 1, \quad 0 \leqq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \leqq 1, \quad 0 \leqq \lambda_i \leqq 1 \ (i = 1, 2, \cdots, n-1) \right\}$$

(W10)

まず($\Longrightarrow$)を示します。 $0 < \mu \leqq 1$, $\lambda_n = 1 - \mu$ より. $0 \leqq \lambda_n < 1$.
$i \neq n$ とすれば、$\lambda_i = \mu \nu_i$, $0 < \mu \leqq 1$, $0 \leqq \nu_i \leqq 1$ より、$0 \leqq \lambda_i \leqq 1$.
$0 \leqq \lambda_n$, $0 \leqq \lambda_i$ $(i \neq n)$ より、$0 \leqq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$. また、$0 \leqq \sum_{i=1}^{n-1} \nu_i \leqq 1$ より

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i + \lambda_n = \left(\sum_{i=1}^{n-1} \nu_i\right)\mu + (1 - \mu) \leqq \mu + 1 - \mu = 1.$$

次に($\Longleftarrow$)を示します。 $0 \leqq \lambda_n < 1$, $\mu = 1 - \lambda_n$ より、$0 < \mu \leqq 1$.
$i \neq n$ とすれば、$0 < 1 - \lambda_n$, $0 \leqq \lambda_i$, $\nu_i = \lambda_i / (1 - \lambda_n)$ より、$0 \leqq \nu_i$, $0 \leqq \sum_{i=1}^{n-1} \nu_i$.
$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \leqq 1$ より、$\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \leqq 1 - \lambda_n$. 両辺を正数 $(1 - \lambda_n)$ で割れば、
$\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i / (1 - \lambda_n) \leqq 1$. よって、$\sum_{i=1}^{n-1} \nu_i \leqq 1$.
$0 \leqq \nu_i$, $\sum_{i=1}^{n-1} \nu_i \leqq 1$ より、$\nu_i \leqq 1$.

$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \leqq 1$ が、($\Longleftarrow$)の証明において決定的な働きをしていますね。

【P456】 n次元単体の定義（続き）

次が成り立ちます。

(W9)の関係にある $\{\mu, \nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_{n-1}\}$, $\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$ に対して、

$$A_0 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = \mu\left(A_0 + \sum_{i=1}^{n-1} \nu_i v_i\right) + (1-\mu)A_n \tag{W11}$$

計算します。

$$\begin{aligned} A_0 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i &= A_0 + \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i v_i + \lambda_n v_n \\ &= \mu A_0 + (1-\mu)A_0 + \sum_{i=1}^{n-1} \mu \nu_i v_i + (1-\mu)v_n \\ &= \mu A_0 + \mu \sum_{i=1}^{n-1} \nu_i v_i + (1-\mu)(A_0 + v_n) \\ &= \mu\left(A_0 + \sum_{i=1}^{n-1} \nu_i v_i\right) + (1-\mu)A_n \end{aligned}$$

//

$\mathcal{S}_{n-1} = \mathcal{S}'_{n-1}$, $\mathcal{S}_n(\lambda_n = 1) = \{A_n\} = \mathcal{S}'_n(\mu = 0)$, 及び(W10), (W11)より、$\mathcal{S}_n \subset \mathcal{S}'_n$ かつ $\mathcal{S}'_n \subset \mathcal{S}_n$. よって $\mathcal{S}_n = \mathcal{S}'_n$.

以上で、同一の A_0, $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ に対して(136.1)で定まる $\mathcal{S}_n$ と(138.1)で定まる $\mathcal{S}_n$ が同一の集合であることが帰納法で証明されたことになります。 Q.E.D.

(138)はn次元単体の体積を求めるのに便利な定義ですね。

次に、n次元平行体の定義（その3）に対応するn次元単体の定義、つまり、最小凸集合としてのn次元単体の定義を行いましょう。その前に、n次元単体が凸集合であることを示しましょう。

n次元(平面)単体は凸集合です。　定理(139)

証明します。難しくはないのですが、ちょっと長くなるのが難点です。

(136)で定義されるn次元単体$\mathcal{S}_n(A_0; v_1, v_2, \cdots, v_n)$を単に$\mathcal{S}_n$と記すことにします。凸集合の定義(12)より、任意の2点$x, x' \in \mathcal{S}_n$に対して、x, x'を2端点(2頂点)とする線分上の任意の点

$$y = \mu x + (1-\mu)x', \quad 0 \leqq \mu \leqq 1 \tag{W12}$$

が$y \in \mathcal{S}_n$であることを示せば、$\mathcal{S}_n$が凸集合であることを証明したことになります。

$x, x' \in \mathcal{S}_n$, (136.1)より、x, x'は次のように表現されます。

$$x = A_0 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i, \quad x' = A_0 + \sum_{i=1}^{n} \lambda'_i v_i \tag{W13}$$

但しここでλ_i, λ'_iは

$$0 \leqq \lambda_i \leqq 1 \ (i = 1, 2, \cdots, n), \quad \lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i, \quad 0 \leqq \lambda \leqq 1,$$
$$0 \leqq \lambda'_i \leqq 1 \ (i = 1, 2, \cdots, n), \quad \lambda' = \sum_{i=1}^{n} \lambda'_i, \quad 0 \leqq \lambda' \leqq 1. \tag{W14}$$

(W12)のyの右辺に、(W13)のx, x'を代入し整理します。

$$y = \mu\left(A_0 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i\right) + (1-\mu)\left(A_0 + \sum_{i=1}^{n} \lambda'_i v_i\right)$$
$$= (\mu + 1 - \mu)A_0 + \sum_{i=1}^{n} (\mu\lambda_i + (1-\mu)\lambda'_i) v_i$$

$$y = A_0 + \sum_{i=1}^{n} ((\lambda_i - \lambda'_i)\mu + \lambda'_i) v_i, \quad 0 \leqq \mu \leqq 1. \tag{W15}$$

【P458】9月3日(金) n次元単体の定義(続き)

ここで ν_i, νを次のように定義します。

$$\nu_i = (\lambda_i - \lambda_i')\mu + \lambda_i' \quad (i = 1, 2, 3, \cdots, n),$$

$$\nu = \sum_{i=1}^{n} \nu_i = (\lambda - \lambda')\mu + \lambda', \quad 0 \leqq \mu \leqq 1. \qquad \text{(W16)}$$

このときyは

$$y = A_0 + \sum_{i=1}^{n} \nu_i v_i \qquad \text{(W17)}$$

従って

$$0 \leqq \nu_i \leqq 1 \ (i = 1, 2, 3, \cdots, n), \quad 0 \leqq \nu \leqq 1. \qquad \text{(W18)}$$

であれば $y \in S_n$です。(W18)を示せば証明完了です。

(W14)と $0 \leqq \mu \leqq 1$ を用いて(W18)を示します。場合分けして考える必要があります。まず $0 \leqq \nu_i \leqq 1 \ (i = 1, 2, \cdots, n)$を示します。

$\lambda_i = \lambda_i'$ のとき: $\nu_i = \lambda_i'$. $\therefore$ $0 \leqq \nu_i \leqq 1$.

$\lambda_i < \lambda_i'$ のとき: $\min \nu_i = \nu_i(\mu = 1) = \lambda_i$. $\therefore$ $0 \leqq \nu_i$.

$\max \nu_i = \nu_i(\mu = 0) = \lambda_i'$. $\therefore$ $\nu_i \leqq 1$.

$\lambda_i > \lambda_i'$ のとき: $\min \nu_i = \nu_i(\mu = 0) = \lambda_i'$. $\therefore$ $0 \leqq \nu_i$.

$\max \nu_i = \nu_i(\mu = 1) = \lambda_i$. $\therefore$ $\nu_i \leqq 1$.

次に $0 \leqq \nu \leqq 1$を示します。上記と同様ですね。

$\lambda = \lambda'$ のとき: $\nu = \lambda'$. $\therefore$ $0 \leqq \nu \leqq 1$.

$\lambda < \lambda'$ のとき: $\min \nu = \nu(\mu = 1) = \lambda$. $\therefore$ $0 \leqq \nu$.

$\max \nu = \nu(\mu = 0) = \lambda'$. $\therefore$ $\nu \leqq 1$.

$\lambda > \lambda'$ のとき: $\min \nu = \nu(\mu = 0) = \lambda'$. $\therefore$ $0 \leqq \nu$.

$\max \nu = \nu(\mu = 1) = \lambda$. $\therefore$ $\nu \leqq 1$

Q.E.D.

【P459】9月4日(土) n次元単体の定義(続き)

n次元単体の定義(その3)

n次元またはそれ以上の次元Nのユークリッド空間(アファイン空間)R^N上の、1点A_0とn個のベクトルの集合$\{v_1, v_2, v_3, \cdots, v_n\}$に対して、$n+1$個の点からなる集合$\mathcal{A}_n$を次式で定めます。

$$\mathcal{A}_n = \{A_0, A_i = A_0 + v_i \ (i = 1, 2, 3, \cdots, n)\} \quad .1)$$

集合$\mathcal{A}_n$を含む最小凸集合を$\mathcal{S}_n(A_0; v_1, v_2, v_3, \cdots, v_n)$と記し、$n$次元(平面)単体と呼びます。

点A_0を始頂点と呼び、$\{v_1, v_2, v_3, \cdots, v_n\}$を始頂点$A_0$に関する単体要素集合と呼びます。

$\{v_1, v_2, v_3, \cdots, v_n\}$が1次独立であるとき$\mathcal{S}_n$を縮退していない$n$次元単体と呼び、そうでないとき縮退した$n$次元単体と呼びます。

$\mathcal{A}_n$の$n+1$個の要素のことを$\mathcal{S}_n$の頂点と呼びます。

定義(140)

定義(138)と定義(140)が同値であることを証明しましょう。

(138)で定義される$\mathcal{S}_n(A_0; v_1, v_2, \cdots, v_n)$を単に$\mathcal{S}_n$と記すことにします。

定理(139)より$\mathcal{S}_n$が凸集合であることは保障さ(Guarantee)れています。また、最小凸集合の定義+α(15)より、最小凸集合の唯一性(一意性)も保障されています。従って、$\mathcal{S}_n$の最小性を示せば証明は完了したことになります。

$\mathcal{A}_n \subset \mathcal{S}_n$であることに留意しよう。$\mathcal{S}_n$の最小性とは、

$$\mathcal{A}_n \subset C \text{ なる任意の凸集合 } C \text{ に対して、} \mathcal{S}_n \subset C. \qquad (W19)$$

が成り立つことを意味します。

 9月5日（日）n次元単体の定義（続き）

（138）はnに関する数学的帰納法によって$\mathcal{S}_n$を定義しているので、（W19）も帰納法で証明します。

$\mathcal{A}_0 = \{A_0\} = \mathcal{S}_0$ だから、$\mathcal{A}_0$を含む任意の凸集合Cに対して$\mathcal{S}_0 \subset C$です。

（W19）において、$n \geqq 1$に対して、nを$n-1$で置き換えた命題が成り立つと仮定します。

ここで、$a, b \in R^N$に対して、a, bを2端点とする線分（Finite Straight Line）をfsLine(a, b)と記すことにします。

$$\mathrm{fsLine}(a, b) = \left\{ x \in R^N \,\middle|\, \begin{array}{l} x = \mu a + (1-\mu) b, \\ 0 \leqq \mu \leqq 1 \end{array} \right\} \qquad \text{(W20)}$$

これを用いると（138.1）は次のように表現できます。

$$\mathcal{S}_n = \bigcup_{x \in \mathcal{S}_{n-1}} \mathrm{fsLine}(x, A_n) \qquad \text{(W21)}$$

Cを、$\mathcal{A}_n \subset C$を満たす任意の凸集合とします。

$\mathcal{A}_{n-1} \subset \mathcal{A}_n \subset C$です。よって帰納法の仮定から$\mathcal{S}_{n-1} \subset C$です。
また$A_n \in C$です。さらにCは凸集合です。従って、

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_n &= \bigcup_{x \in \mathcal{S}_{n-1}} \mathrm{fsLine}(x, A_n) \\ &\subset \bigcup_{x \in C} \mathrm{fsLine}(x, A_n) \\ &\subset \bigcup_{x, y \in C} \mathrm{fsLine}(x, y) \subset C. \end{aligned} \qquad \text{(W22)}$$

Q.E.D.

余談になりますが、（W22）の3行目に現われる2個の“$\subset$”は“$=$”で置き換えることが出来ます。

でもどちらであっても、$\mathcal{S}_n \subset C$の証明にとっては同じことです。

【P461】n次元単体の定義（続き）

n次元単体の定義（その4）

n次元またはそれ以上の次元Nのユークリッド空間（アファイン空間）R^N上の、1点A_0とn個のベクトルの集合$\{v_1, v_2, v_3, \cdots, v_n\}$に対して、次式で定まる、$R^N$上の部分集合$S_n(A_0; v_1, v_2, v_3, \cdots, v_n)$のことを$n$次元（平面）単体と呼びます。

$$
\begin{aligned}
&S_n(A_0; v_1, v_2, v_3, \cdots, v_n) \\
&\quad = \left\{ x \in R^N \;\middle|\; \begin{array}{l} x = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \lambda_i A_i, \\ A_i = A_0 + v_i \; (i = 1, 2, 3, \cdots, n), \\ 0 \leqq \lambda_i \leqq 1 \; (i = 0, 1, 2, 3, \cdots, n), \\ \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1. \end{array} \right\} \qquad .1)
\end{aligned}
$$

点A_0を始頂点と呼び、$\{v_1, v_2, v_3, \cdots, v_n\}$を始頂点$A_0$に関する単体要素集合と呼びます。

単体要素集合$\{v_1, v_2, v_3, \cdots, v_n\}$が1次独立であるとき$S_n$を縮退していない$n$次元単体と呼び、そうでないとき$S_n$を縮退した$n$次元単体と呼びます。

$n+1$個の点、$A_0, A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n$を$S_n$の頂点と呼びます。

定義（141）

定義（136）と定義（141）が同値であることを証明します。

同一のA_0, $\{v_1, v_2, v_3, \cdots, v_n\}$に対して、（136）で定まる$S_n(A_0; v_1, v_2, v_3, \cdots, v_n)$を単に$S_n$と記し、（141）で定まる$S_n(A_0; v_1, v_2, v_3, \cdots, v_n)$を単に$S_n'$と記します。$S_n = S_n'$を示します。

【P462】n 次元単体の定義（続き）

どちらの定義でも、$A_i = A_0 + v_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$ であることに留意しよう。
まず、$S_n \subset S_n'$ を示します。$x \in S_n$ とすれば、

$$x = A_0 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i, \quad 0 \leqq \lambda_i \leqq 1 \ (i=1,2,\cdots,n),$$
$$0 \leqq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \leqq 1.$$

$$x = A_0 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (A_i - A_0)$$
$$= \left(1 - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right) A_0 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i A_i.$$

ここで $\lambda_0 = 1 - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ と置くと

$$x = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i A_i, \quad 0 \leqq \lambda_i \leqq 1 \ (i=0,1,2,\cdots,n),$$
$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1.$$

よって $x \in S_n'$. $S_n \subset S_n'$.
次に、$S_n' \subset S_n$ を示します。$x \in S_n'$ とすれば、

$$x = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i A_i, \quad 0 \leqq \lambda_i \leqq 1 \ (i=0,1,2,\cdots,n),$$
$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1.$$

$$x = \lambda_0 A_0 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (A_0 + v_i)$$
$$= \left(\lambda_0 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right) A_0 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i.$$

$$x = A_0 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i, \quad 0 \leqq \lambda_i \leqq 1 \ (i=1,2,\cdots,n),$$
$$0 \leqq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \leqq 1.$$

よって $x \in S_n$. $S_n' \subset S_n$. 従って、$S_n = S_n'$.

Q.E.D.

同じ λ_i ($i=1,2,3,\cdots,n$) によって、$\mathcal{S}_n$ の元と $\mathcal{S}'_n$ の元が1対1に対応していますね。しかも恒等写像です。ちょっと面白い、かも?

n次元単体の m次元超表面の定義

A_0 を始頂点とし $\{v_1, v_2, v_3, \cdots, v_n\}$ を単体要素集合とする n次元(平面)単体を $\mathcal{S}_n = \mathcal{S}_n(A_0; v_1, v_2, v_3, \cdots, v_n)$ とします。

$\mathcal{S}_n$ の $n+1$個の頂点を A_0, $A_i = A_0 + v_i$ ($i=1,2,3,\cdots,n$) とします。添字集合 I_m を、下記を満たすものとして定義します。

$$I_m \subset \{0,1,2,3,\cdots,n\}, \quad \#(I_m) = m+1. \qquad .1)$$

ここで、$\#(X)$ は有限集合 X の元の個数を表わすものとします。

I_m を用いて集合 ${}_n\mathcal{S}_m$ を次式で定義します。

$$\begin{aligned} {}_n\mathcal{S}_m &= {}_n\mathcal{S}_m(I_m) = {}_n\mathcal{S}_m(I_m, \mathcal{S}_n) \\ &= \Big\{ x \in R_N \;\Big|\; x = \sum_{i \in I_m} \lambda_i A_i, \\ &\qquad 0 \leqq \lambda_i \leqq 1 \ (i \in I_m), \\ &\qquad \sum_{i \in I_m} \lambda_i = 1. \Big\} \end{aligned} \qquad .2)$$

この ${}_n\mathcal{S}_m$ を n次元単体 $\mathcal{S}_n$ の **m次元超表面** と呼びます。

m が定まっても I_m は一意的には定まらず、$n+1$個の添字から $m+1$個の添字を選ぶ組み合せ数だけの個数の I_m が存在します。

$\mathcal{S}_n$ の m次元超表面 ${}_n\mathcal{S}_m$ の個数は $\begin{pmatrix} n+1 \\ m+1 \end{pmatrix}$ です。

${}_n\mathcal{S}_m \subset \mathcal{S}_n$ です。また ${}_n\mathcal{S}_m$ は m次元(平面)単体です。

定義(142)

【P464】9月7日(火) n次元単体の定義(続き)

(142)は定義+αです。αは最後の2行です。${}_n\mathcal{S}_m$が$\binom{n+1}{m+1}$個存在することは自明です。n次元単体の定義(その4)(141)より、${}_n\mathcal{S}_m \subset \mathcal{S}_n$, ${}_n\mathcal{S}_m$がm次元単体であることも自明です。

${}_n\mathcal{S}_0$は$\mathcal{S}_n$の頂点です。${}_n\mathcal{S}_1$は$\mathcal{S}_n$の2頂点を2端点とする線分です。これらを辺と呼ぶこともあります。また、${}_n\mathcal{S}_n = \mathcal{S}_n$です。

${}_n\mathcal{S}_m$とn次元球体との関係、例えば、3角形とその外接円や内接円との関係、4面体の外接球や満腹球や内接球との関係、などなど、については主題をあらためて論じる予定です。

最後に、18次元単体を2次元平面に射影した図形とも見做せる、19次放射体の一部の作図に挑戦しましょう。

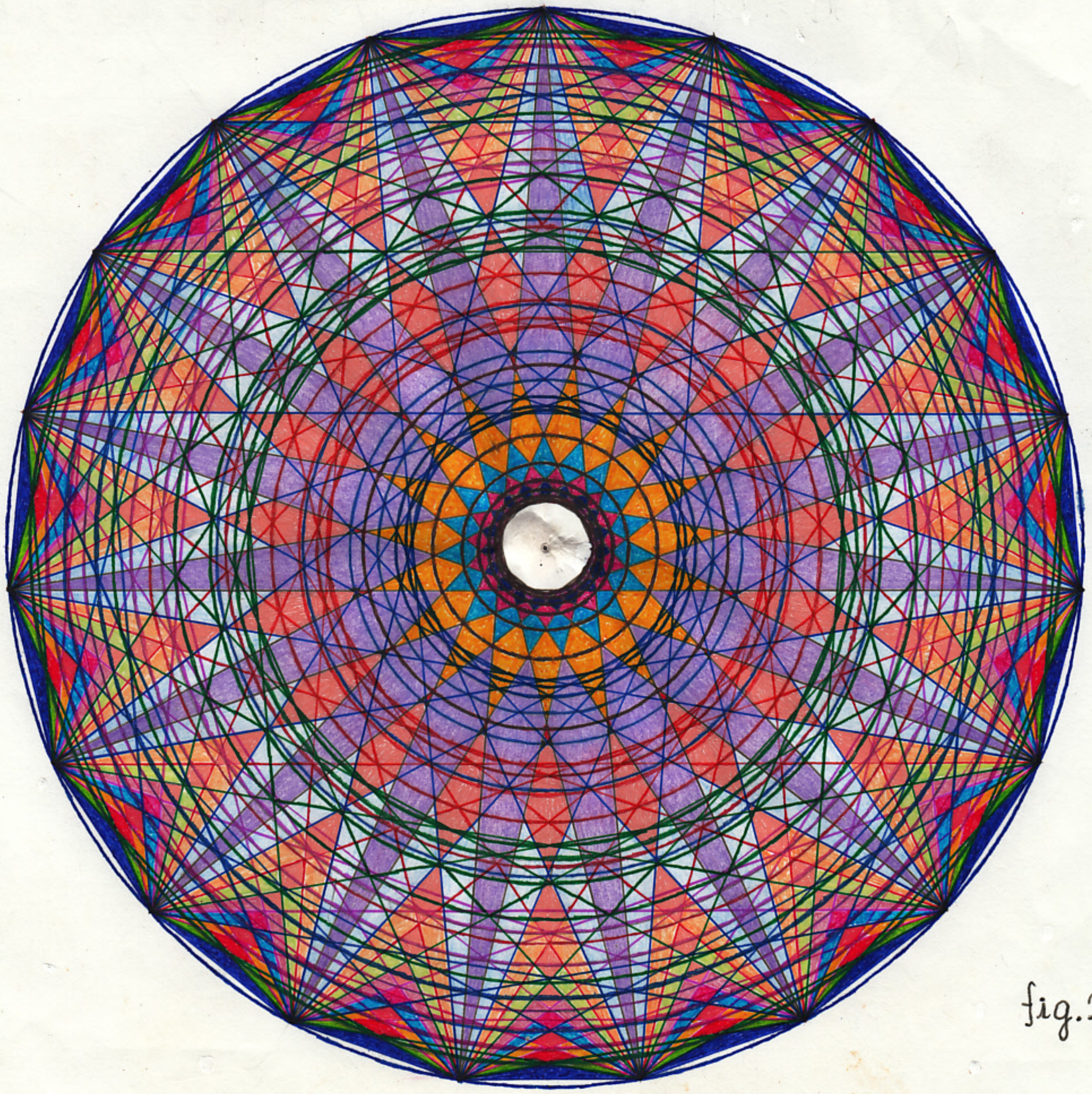


fig.229

【P465】9月12日（日）小休止：Hidden2

● 小休止：Hidden2

6重交点を無限に拡大すると？

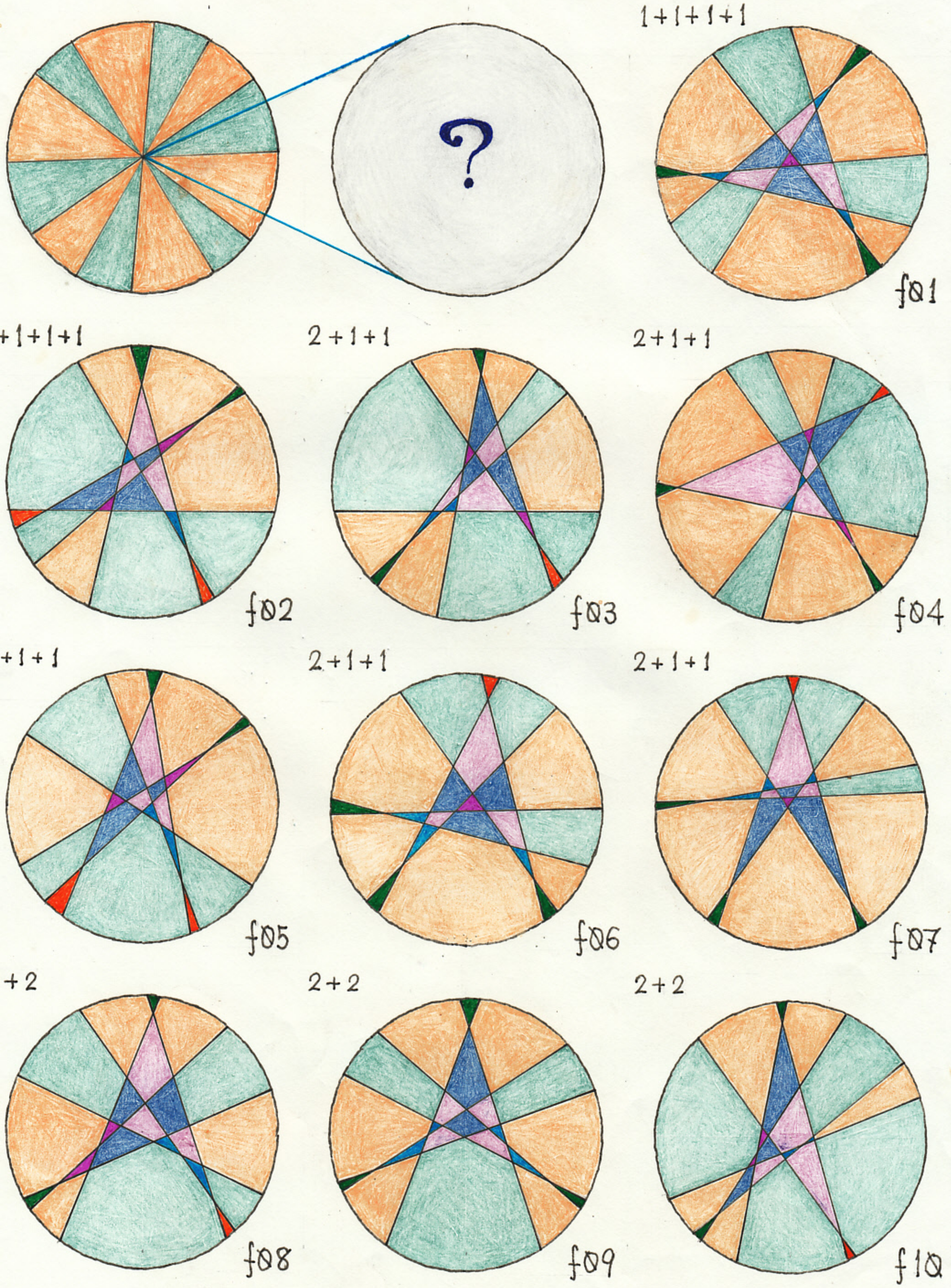


fig.230.1

【P466】小休止：Hidden2（続き）

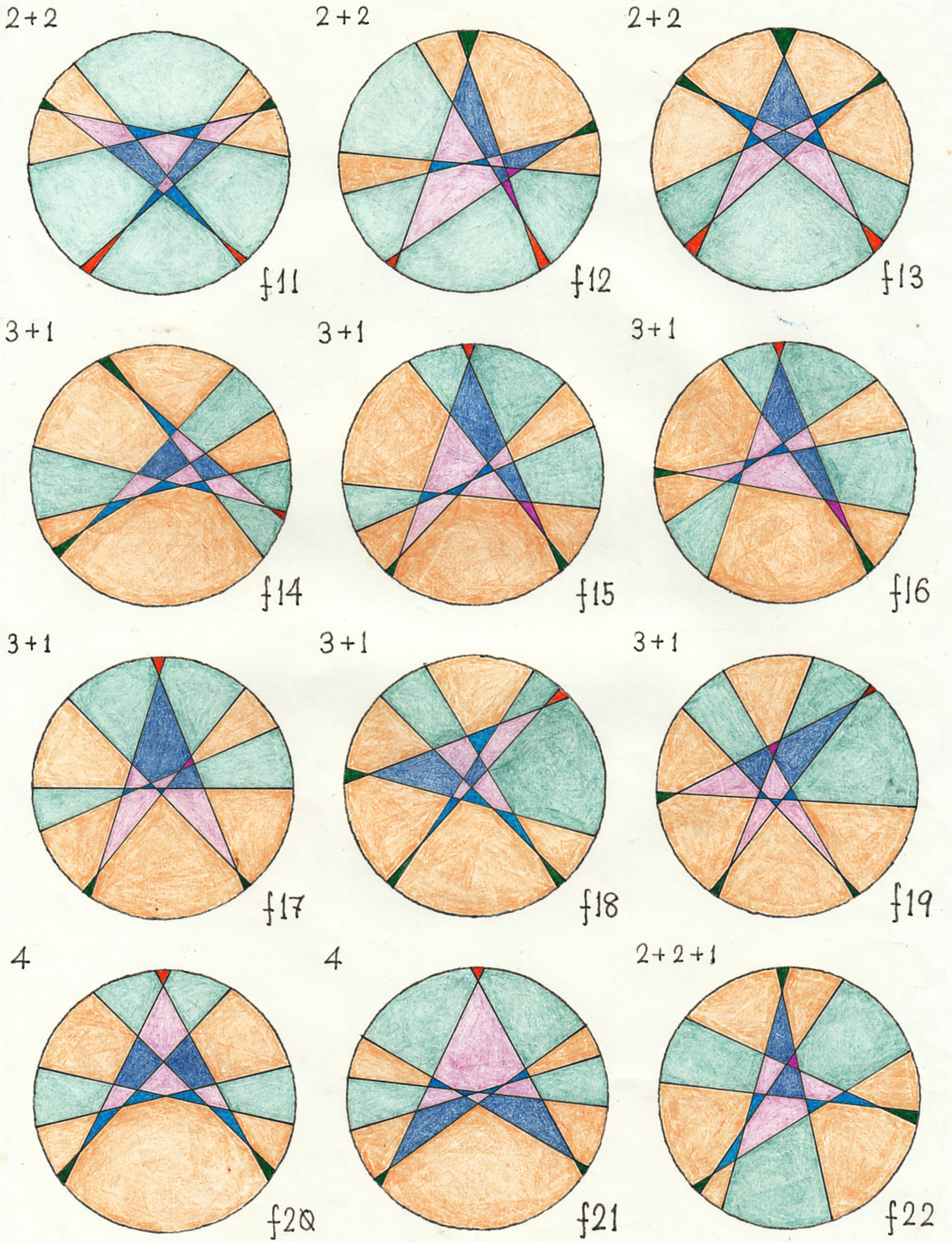
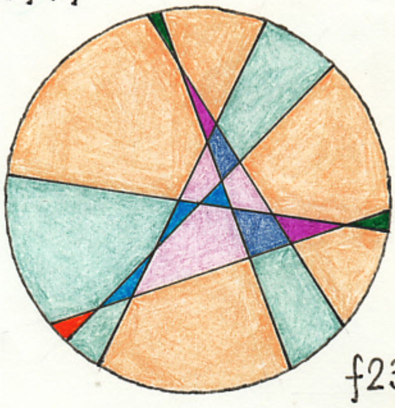


fig.230.2

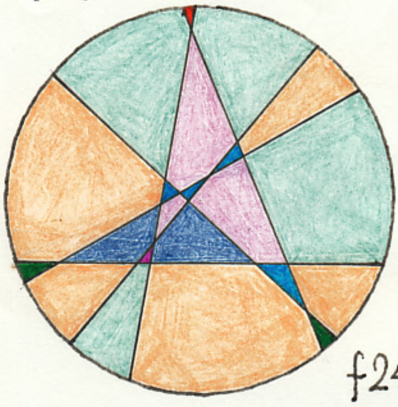
【P467】 小休止：Hidden2（続き）

3+1+1



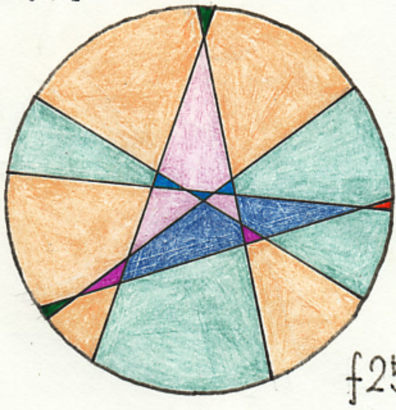
f23

3+1+1



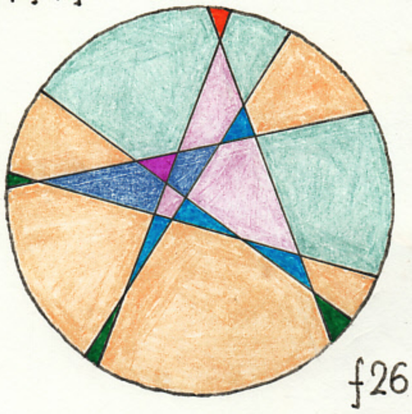
f24

3+1+1



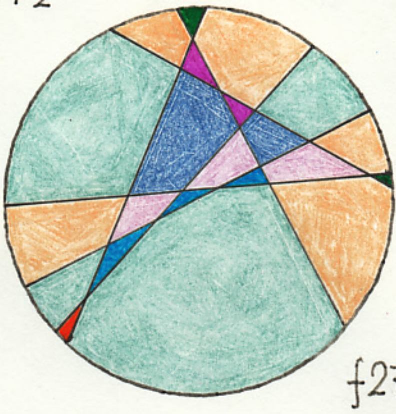
f25

3+1+1



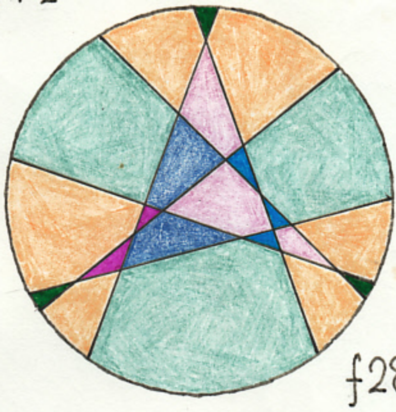
f26

3+2



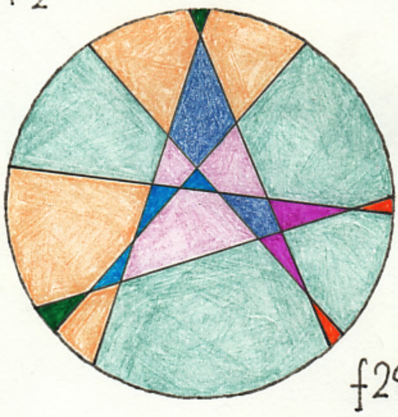
f27

3+2



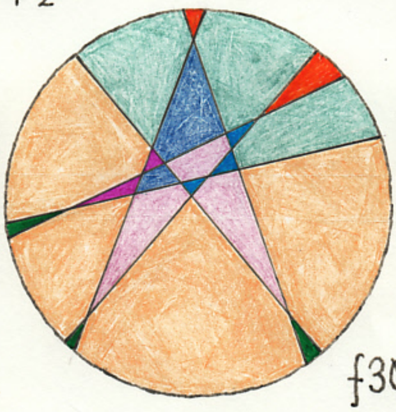
f28

3+2



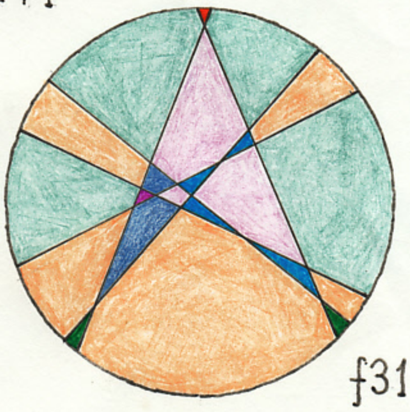
f29

3+2



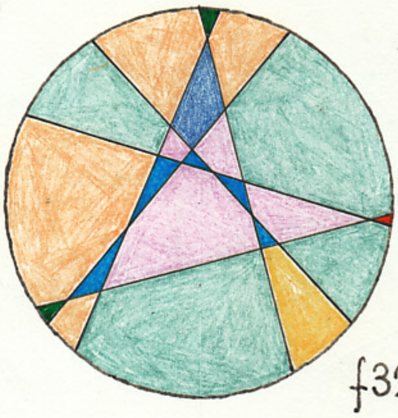
f30

4+1



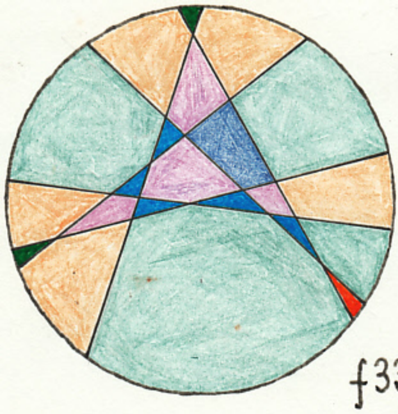
f31

5



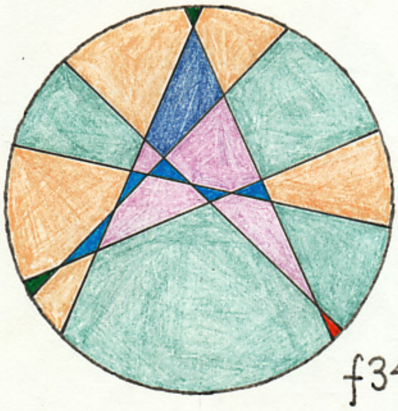
f32

5



f33

5



f34

fig.230.3

【P468】 小休止：Hidden2（続き）

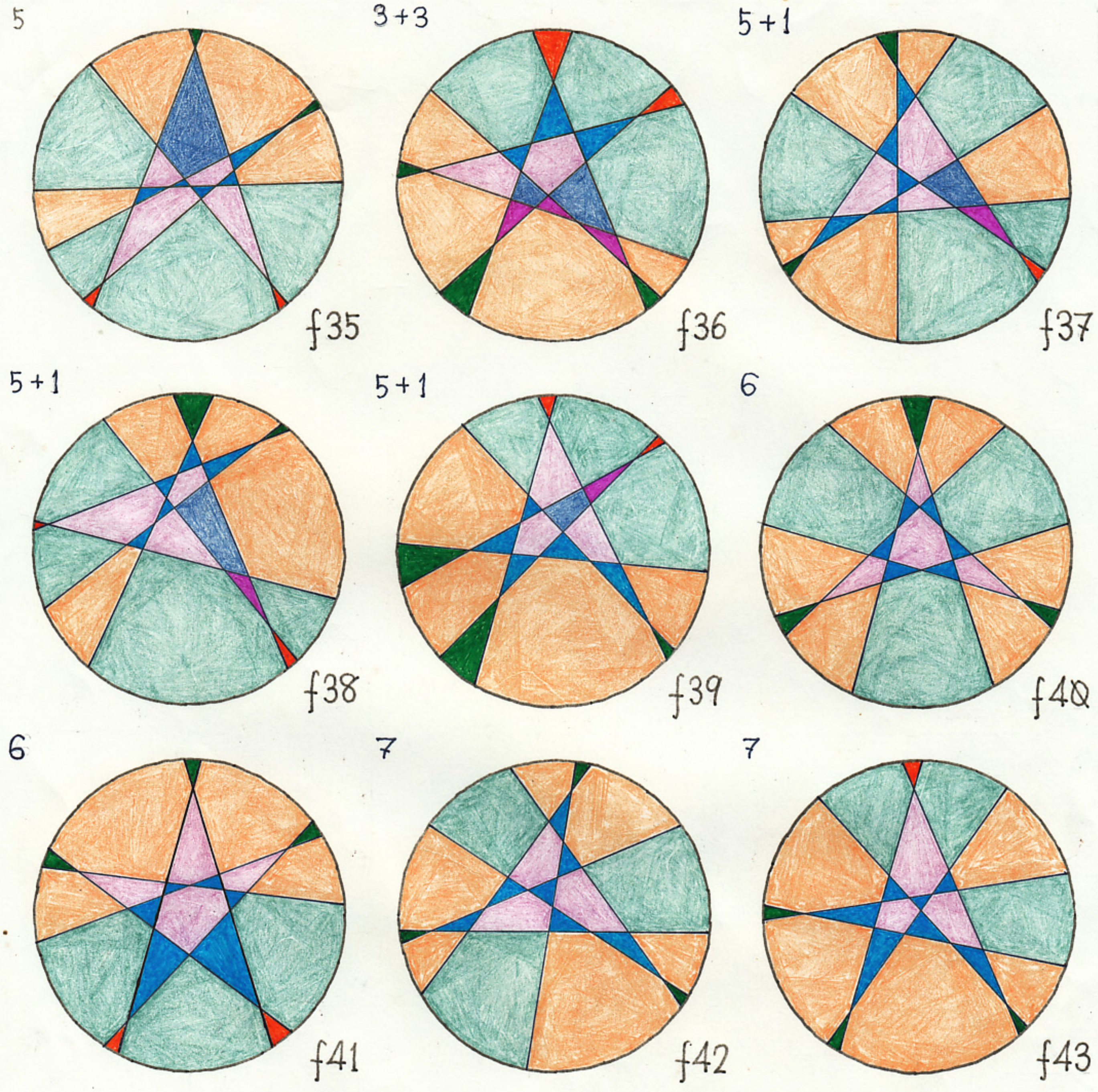


fig.230.4

43個の各絵の左上に記した数字（の和）が何を意味しているか貴方に解りますか？

Hint. “個数”, “3角形”, “連結”.