● 球面3角形の双対性

球面3角法の公式(132)の全体を見渡すと、ある対称性が存在することに気付きます。大文字と小文字を入れ換えて符号を一部変更すると、ある公式は他のある公式と一致し、またある公式は自分自身と一致します。さらに不等式群(134)も考慮すると、次のような変換に思い至ります。

双対変換

$$a \longrightarrow \pi - A \,, \quad A \longrightarrow \pi - a$$
$$b \longrightarrow \pi - B \,, \quad B \longrightarrow \pi - b$$
$$c \longrightarrow \pi - C \,, \quad C \longrightarrow \pi - c$$

定義(135)

この双対変換によって、不等式群，等式群は、それぞれ全体として不変です。絵にしましょう。

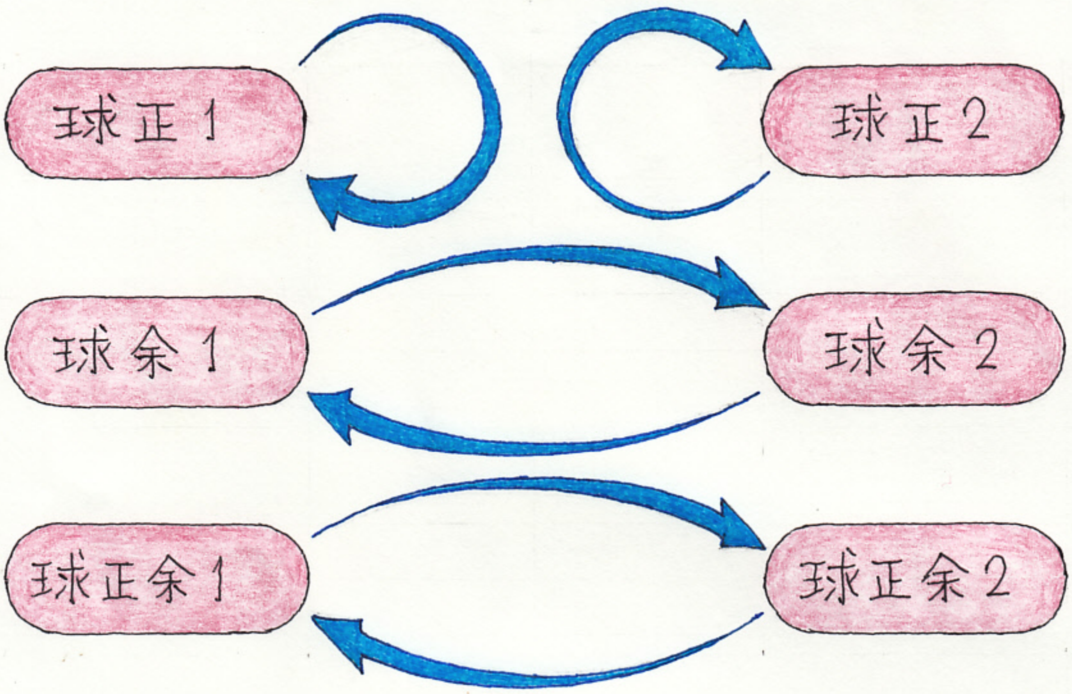
不等式の双対変換 fig.211

$$0 \leqq a \leqq \pi \quad \rightleftarrows \quad 0 \leqq A \leqq \pi$$

$$a + b \geqq c \quad \rightleftarrows \quad A + B \leqq C + \pi$$

$$a + b + c \leqq 2\pi \quad \rightleftarrows \quad A + B + C \geqq \pi$$

等式の双対変換　　fig. 212



双対変換によって、不等式群，等式群がそれぞれ全体として不変であるということは、辺の長さが a, b, c、内角が A, B, C の球面3角形に対して、辺の長さが $\pi-A$, $\pi-B$, $\pi-C$、内角が $\pi-a$, $\pi-b$, $\pi-c$ の球面3角形が存在する可能性を示唆しています。そうなのです。

このような球面3角形を元の球面3角形の双対(球面)3角形と呼ぶことにします。双対変換を2回続けて施すと元に戻りますから、双対3角形の双対3角形は元の3角形に一致します。つまり2つの3角形は互いに双対の関係にあります。

双対球面3角形が存在することを、その具体的な作図を行うことで示します。これはとても厄介な作業です。健全な球面3角形を1個描くだけでも大円を3個描く必要があります。大円といっても、当紙面に正射影しなければいけませんから実際に描く必要があるのは楕円です。楕円はコンパスを用いて一気に描くことは出来ません。但し、コンパスを複数回用いることによって、描きたい楕円上の確定点をプロットすることは可能です。コンパスの使用回数が多ければ多い程、より正確な楕

円を描くことが出来ます。2つの球面3角形を同一の単位球に同時に描くとすれば最大で6個の楕円を描くことになります。何かうまい方策を講じないと、どの曲線が何だったのか、どの点がどんな点だったのか、何がなんだか判らないことになりかねません。

そこで下図のような、体系的な(Systimatic)命名規則(Naming Rule)を用いることにします。この方法は、図形要素間の相対的な関係を上手にしかも自動的に表現してくれるはずです。

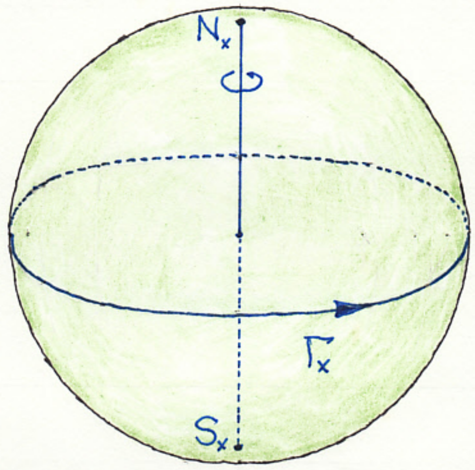


fig.213

それは、Γ_x, N_x, S_x と記される図形間の関係です。向き付けられた1つの大円 Γ_x があるとします。この大円を赤道とし、Γ_x の向きに回るとき、地球にたとえるならば、それが地球の自転方向となるとします。そのとき地球の北極点に相当する点を N_x と記し、南極点に相当する点を S_x と記すことにします。N_x と S_x は互いに対極点の関係にあり、N_x, S_x のいずれか一方が決まれば他方も定まり、赤道としての大円 Γ_x も、向きも含めて一意に定まります。逆に、有向大円 Γ_x が決まれば N_x も S_x も一意に定まります。

Γ_x, N_x, S_x の右下の添字"x"は識別子です。この識別子の命名も気を付けて行う必要があります。単なる整数値を用いて Γ_1, N_1, S_1, Γ_2, N_2 S_2, … として用いてもよいのですが、もっと意味のある添字が望まれます。

【P430】 7月25日(日) 球面3角形の双対性(続き)

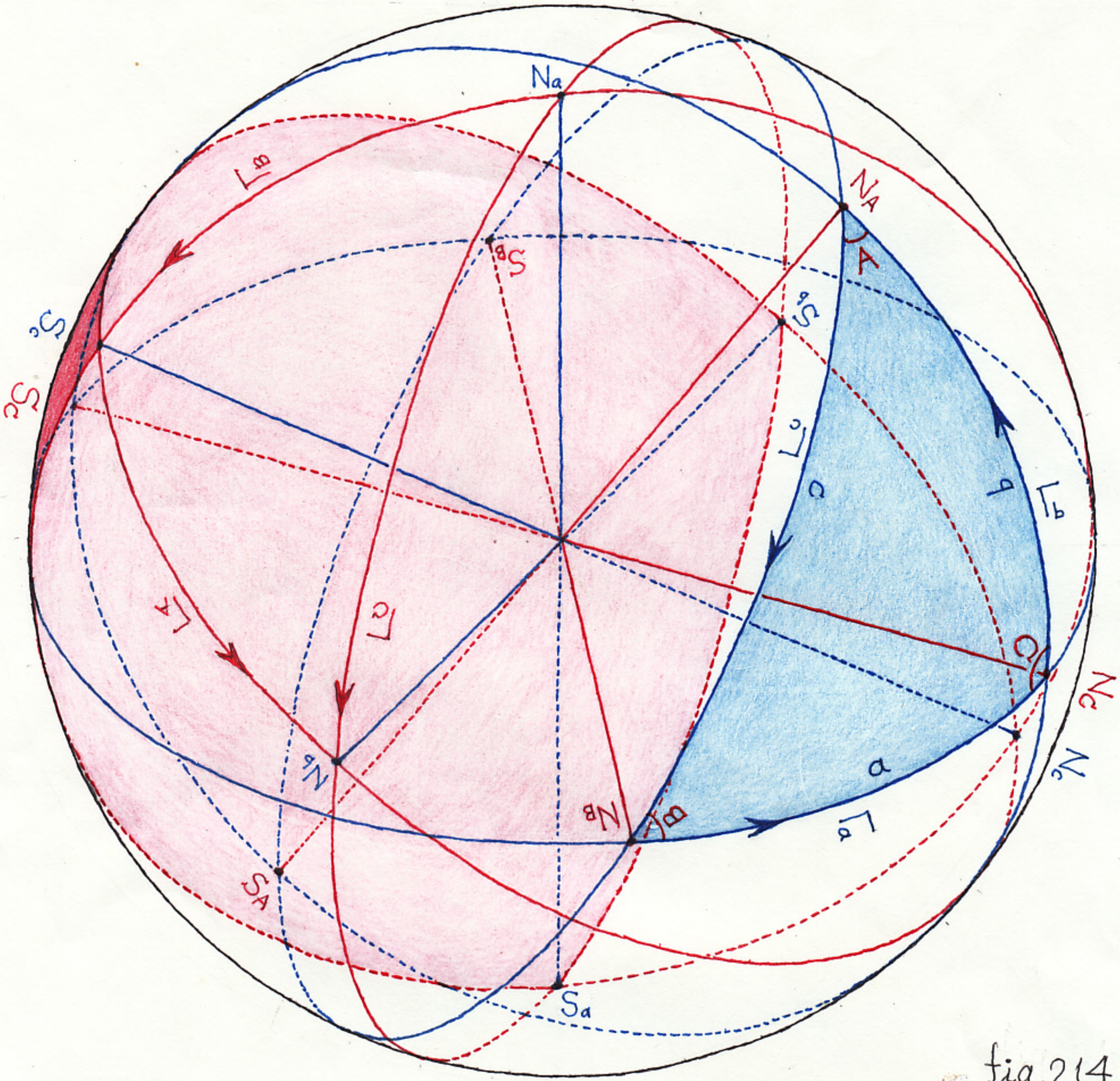


fig.214

互いに対極の関係にある球面3角形は合同である(Congruent)ことに注意しよう。例えば $\triangle N_A N_B N_C$ と $\triangle S_A S_B S_C$ は合同です。

双対関係

fig.215

▲ $N_A N_B N_C$, $\triangle S_A S_B S_C$	▲ $S_a S_b S_c$, $\triangle N_a N_b N_c$
$\triangle N_A N_B S_C$, $\triangle S_A S_B N_C$	$\triangle S_a S_b N_c$, $\triangle N_a N_b S_c$
▲ $N_A S_B S_C$, $\triangle S_A N_B N_C$	▲ $S_a N_b N_c$, $\triangle N_a S_b S_c$
$\triangle N_A S_B N_C$, $\triangle S_A N_B S_C$	$\triangle S_a N_b S_c$, $\triangle N_a S_b N_c$

7月26日(月) 球面3角形の双対性(続き)

fig.214では、互いに双対関係にある、fig.215の1行目の$\triangle N_A N_B N_C$と$\triangle S_a S_b S_c$を彩色して強調してみました。2行目の$\triangle N_A N_B S_C$と$\triangle S_a S_b N_c$はfig.214と似ているので省略します。

$\triangle N_A S_B S_C$と$\triangle S_a N_b N_c$を彩色して強調しましょう。

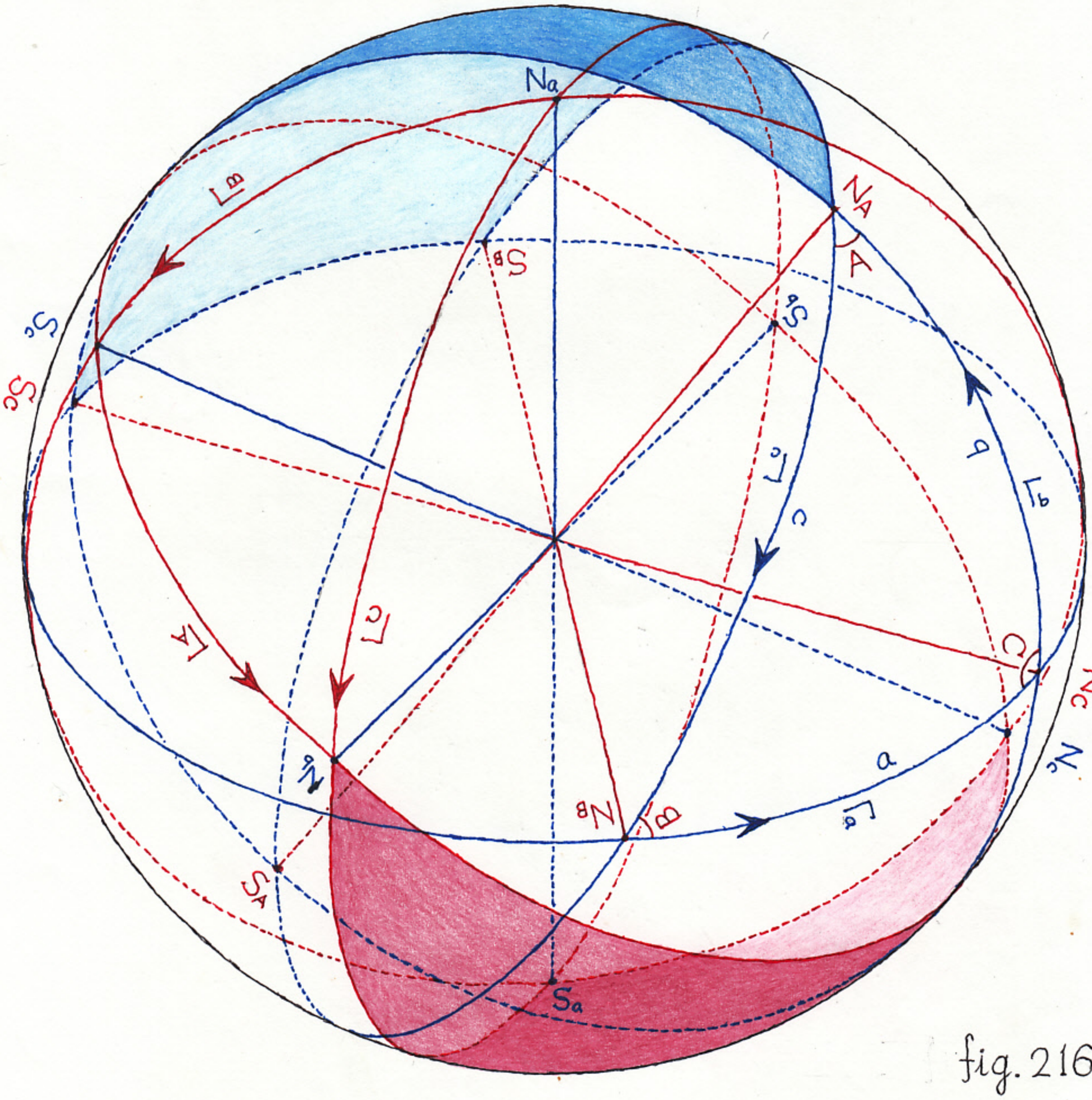


fig.216

fig.215の4行目の$\triangle N_A S_B N_C$と$\triangle S_a N_b S_c$も、fig.216と似ているので彩色絵は省略します。

【P432】7月27日(火) 球面3角形の双対性(続き)

fig.214やfig.216は、かってに与えられた(健全な)球面3角形 $N_AN_BN_C$ を出発点として描かれたものとします。6個の Γ_x, N_x, S_x がどのようにして決定されたのかは、fig.213の命名規則から明らかですね。

fig.215の双対関係を証明するのが目標です。

まず、次が成り立ちます。"⊥"は直交(Perpendicular)を意味します。

- $\Gamma_A \perp \Gamma_b, \Gamma_c$ .A)
- $\Gamma_B \perp \Gamma_c, \Gamma_a$ .B)
- $\Gamma_C \perp \Gamma_a, \Gamma_b$ .C)
- $\Gamma_a \perp \Gamma_B, \Gamma_C$ .a)
- $\Gamma_b \perp \Gamma_C, \Gamma_A$ .b)
- $\Gamma_c \perp \Gamma_A, \Gamma_B$ .c)

(W1)

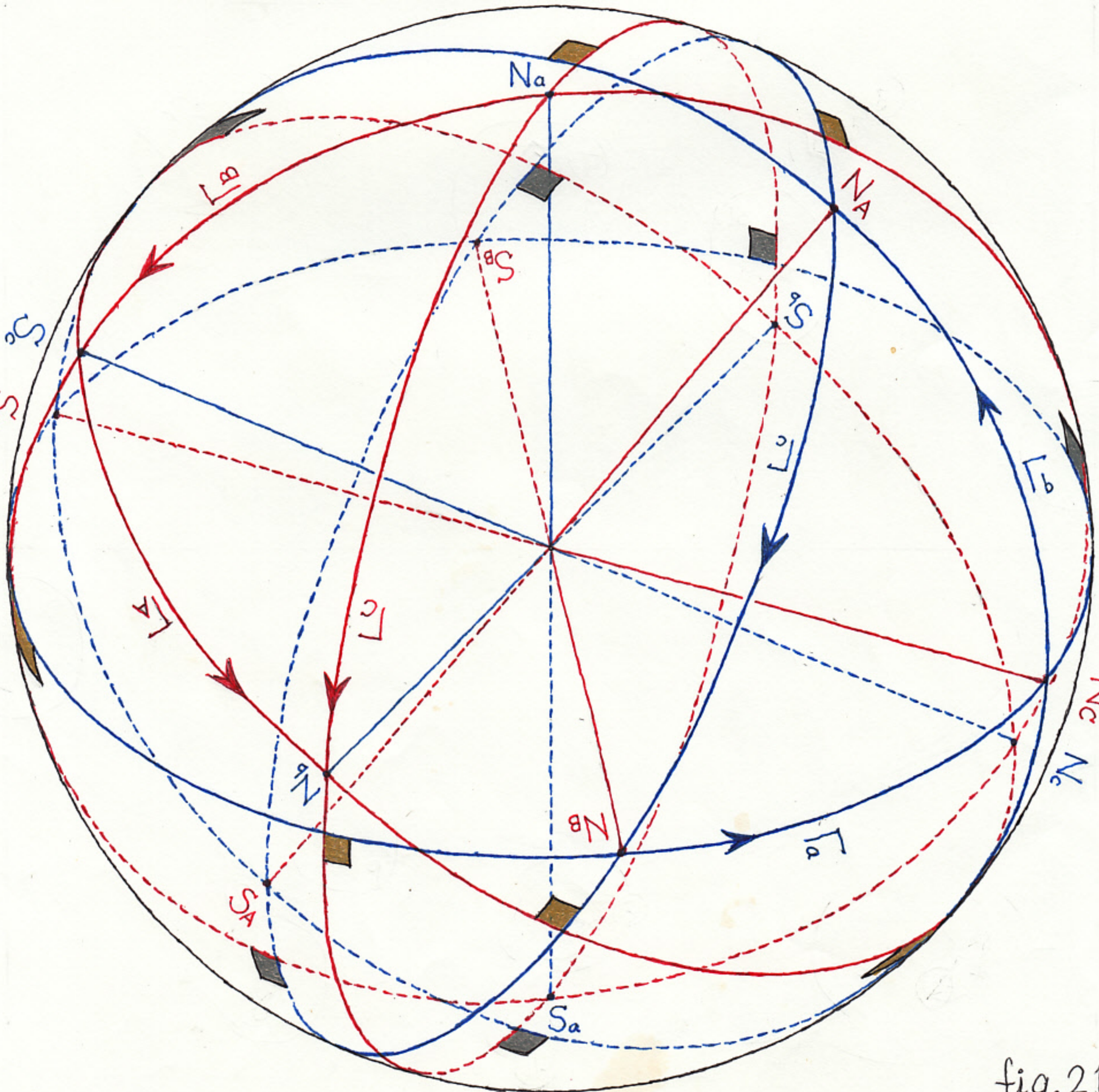


fig.217

（W1）を証明しましょう。fig.217を参照して下さい。

.A）を示します。$\triangle N_A N_B N_C$が出発点として任意に与えられていることを前提としている（Assuming）ことに留意し（Pay Attention）ましょう。点S_Aは頂点N_Aの対極点として定まります。有向大円Γ_Aは、地球に準えれ（Imitate）ば、N_Aを北極（North Pole），S_Aを南極（Sauth Pole）と見做すならば、赤道（Equator）に相当します。$\triangle N_A N_B N_C$の辺$\overset{\frown}{N_A N_B}$，辺$\overset{\frown}{N_A N_C}$は、それぞれ有向大円$\Gamma_c$，$\Gamma_b$の円弧ですから、大円$\Gamma_c$，$\Gamma_b$は頂点$N_A$で交わります。一般に任意の大円上の任意の対極点も同じ大円上の点です。従って、N_Aの対極点であるS_Aは、Γ_c上の点であると同時にΓ_b上の点でもあります。よって、大円Γ_c，Γ_bはS_Aでも交わります。このことは地球に準えれば、Γ_c，Γ_bはどちらも子午線（Meridian）に相当します。任意の子午線は赤道と直交します。よって、Γ_c，Γ_bはΓ_Aと直交することになります。

.B），.C）に関しても、上記と同様の理屈が使えます。

.B），.C）においてΓ_aに注目すれ（Pay Attention）ば.a）が得られます。$\Gamma_X \perp \Gamma_Y \Longleftrightarrow \Gamma_Y \perp \Gamma_X$を暗に（Implicitly）用いました。

.b），.c）も同様です。 Q.E.D.

次が成り立ちます。

- Γ_b，Γ_cはN_A，S_Aで交わる。.A）
- Γ_c，Γ_aはN_B，S_Bで交わる。.B）
- Γ_a，Γ_bはN_C，S_Cで交わる。.C）
- Γ_B，Γ_CはN_a，S_aで交わる。.a）
- Γ_C，Γ_AはN_b，S_bで交わる。.b）
- Γ_A，Γ_BはN_c，S_cで交わる。.c）

（W2）

（W2）を証明します。繰り返しになりますが、$\triangle N_A N_B N_C$が出発点として任意に与えられていることを前提としていることに留意して下さい。

.A）を示します。$\triangle N_A N_B N_C$ を前提としているので、Γ_b, Γ_c が N_A で交わるのは当然です。また S_A は N_A の対極点ですから Γ_b, Γ_c は S_A でも交わることになります。.B), .C）も同様です。 .a）を示します。やはり地球に準える ことにしましょう。Γ_a を赤道と見做します。(W1.α) より Γ_B, Γ_C は Γ_a と直交します。赤道と直交する大円は子午線だけです。よって Γ_B, Γ_C は子午線と見做せます。子午線は北極と南極を通ります。Γ_a を赤道とするとき N_a は北極，S_a は南極です。従って、Γ_B, Γ_C は N_a, S_a で交わります。.b), .c）も同様です。 Q.E.D.

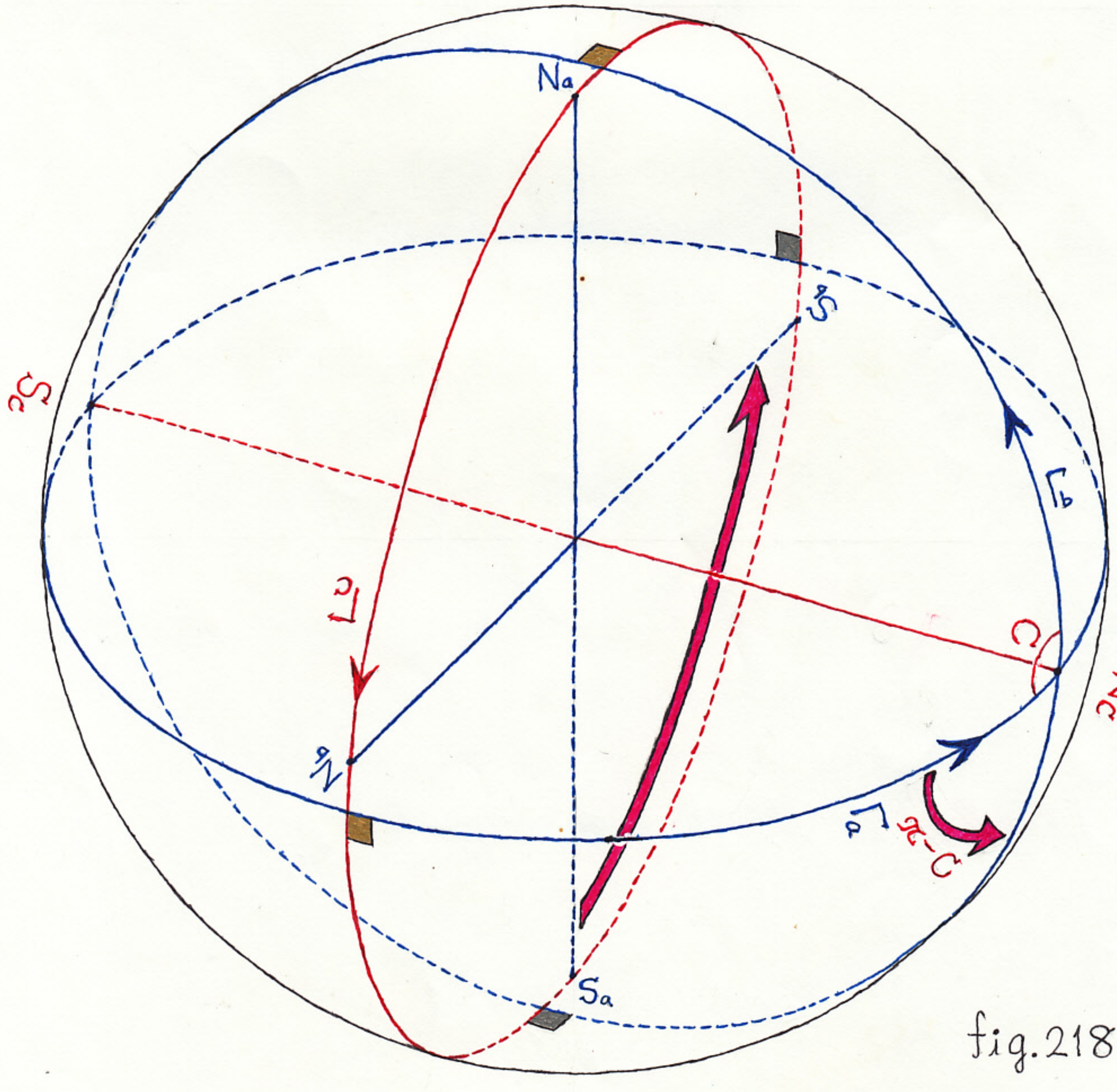


fig.218

【P435】7月30日(金) 球面3角形の双対性(続き)

fig.215の双対関係を証明しましょう。そのためには1行目の関係 ▲$N_AN_BN_C$ ⟷ ▲$S_aS_bS_c$ を示せば十分です。他の関係に関しても同様の理屈が成り立つからです。$\triangle S_aS_bS_c$が$\triangle N_AN_BN_C$の双対3角形であることを示すには、$\triangle S_aS_bS_c$の辺$\overset{\frown}{S_aS_b}$の長さが$\pi - C$であることと、頂点S_cの内角が$\pi - c$であることを示せば十分です。他の辺，頂点に関しても同様の理屈が成り立つからです。

$\triangle S_aS_bS_c$の辺$\overset{\frown}{S_aS_b}$の長さが$\pi - C$であることを示しましょう。3つの大円$\Gamma_a, \Gamma_b, \Gamma_c$に注目しよう。fig.218を参照して下さい。$\Gamma_c$は$\Gamma_a$，$\Gamma_b$のどちらとも直交します。$\Gamma_c$を赤道とすれば、$\Gamma_a, \Gamma_b$は子午線で、$N_c$は北極，$S_c$は南極です。$\Gamma_a$だけを軸$N_cS_c$の回りに回転させるとします。北極$N_c$の側から見て反時計回りに$\pi - C$だけ回転させるとします。そうすると、$\Gamma_a$は$\Gamma_b$にその向きも含めてぴたりと重なります。このとき、$\Gamma_a$の南極$S_a$は、$\Gamma_c$上を移動して、$\Gamma_b$の南極$S_b$に重なることになります。従って、辺$\overset{\frown}{S_aS_b}$の長さは$\pi - C$です。

$\triangle S_aS_bS_c$の頂点S_cの内角が$\pi - c$であることを示しましょう。3つの大円$\Gamma_A, \Gamma_B, \Gamma_C$に注目しよう。fig.219を参照して下さい。$\Gamma_C$は$\Gamma_A$，$\Gamma_B$のどちらとも直行します。$\Gamma_C$を赤道とすれば、$\Gamma_A, \Gamma_B$は子午線で、$N_C$は北極，$S_C$は南極です。$\Gamma_A$の北極$N_A$を、$\Gamma_C$上を$\Gamma_C$の向きに$c$だけ移動させるとします。そうすれば、$N_A$は$\Gamma_B$の北極$N_B$に重なります。このとき、$\Gamma_A$は軸$N_AS_A$の回りに、$\Gamma_C$の南極$S_C$の側から見て時計回りに$c$だけ回転することになります。その結果、$\Gamma_A$は$\Gamma_B$と向きも含めてぴたりと重なります。従って、頂点$S_c$における$\triangle S_aS_bS_c$の内角の大きさは$\pi - c$です。

Q.E.D.

【P436】球面3角形の双対性（続き）

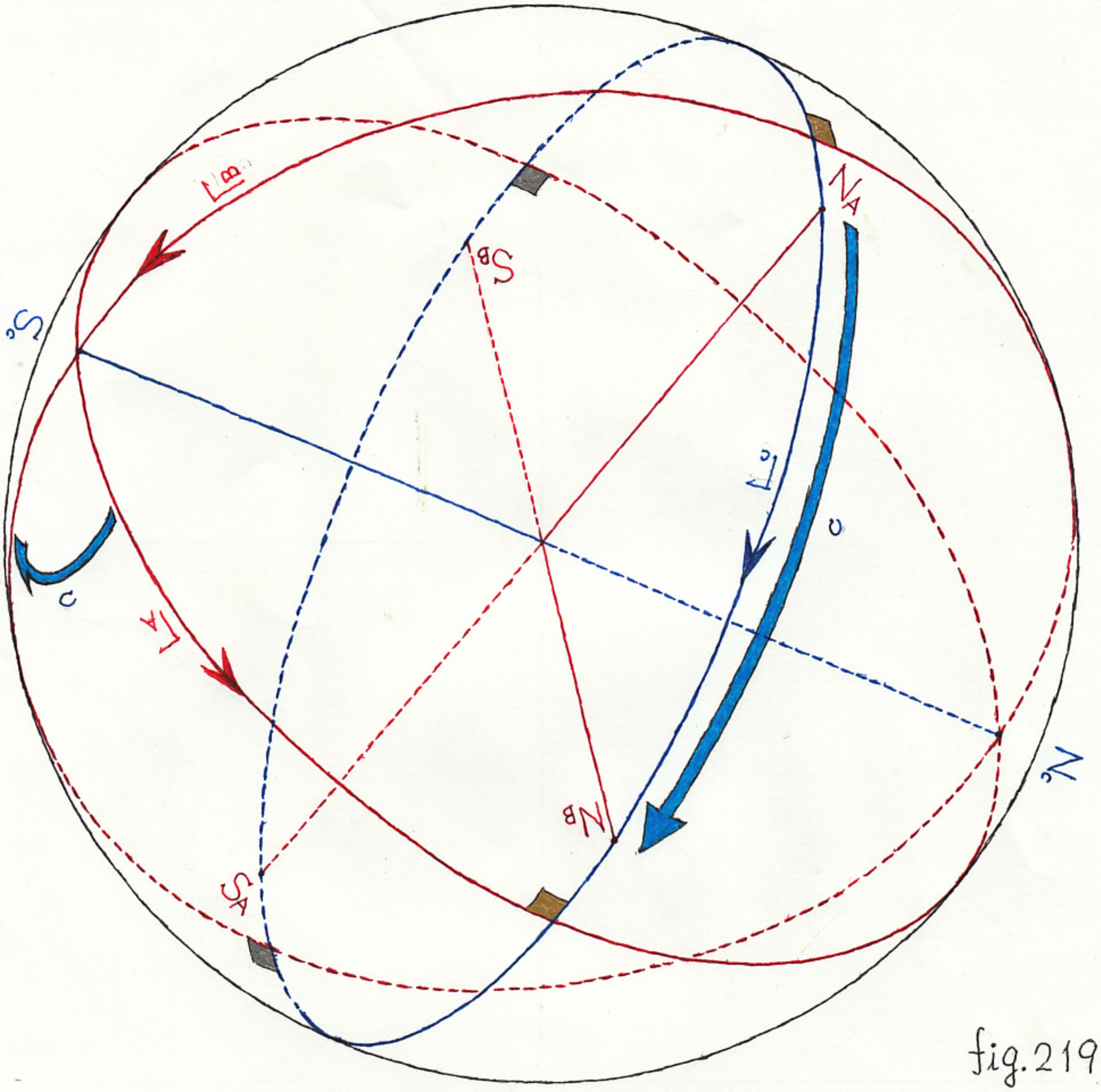
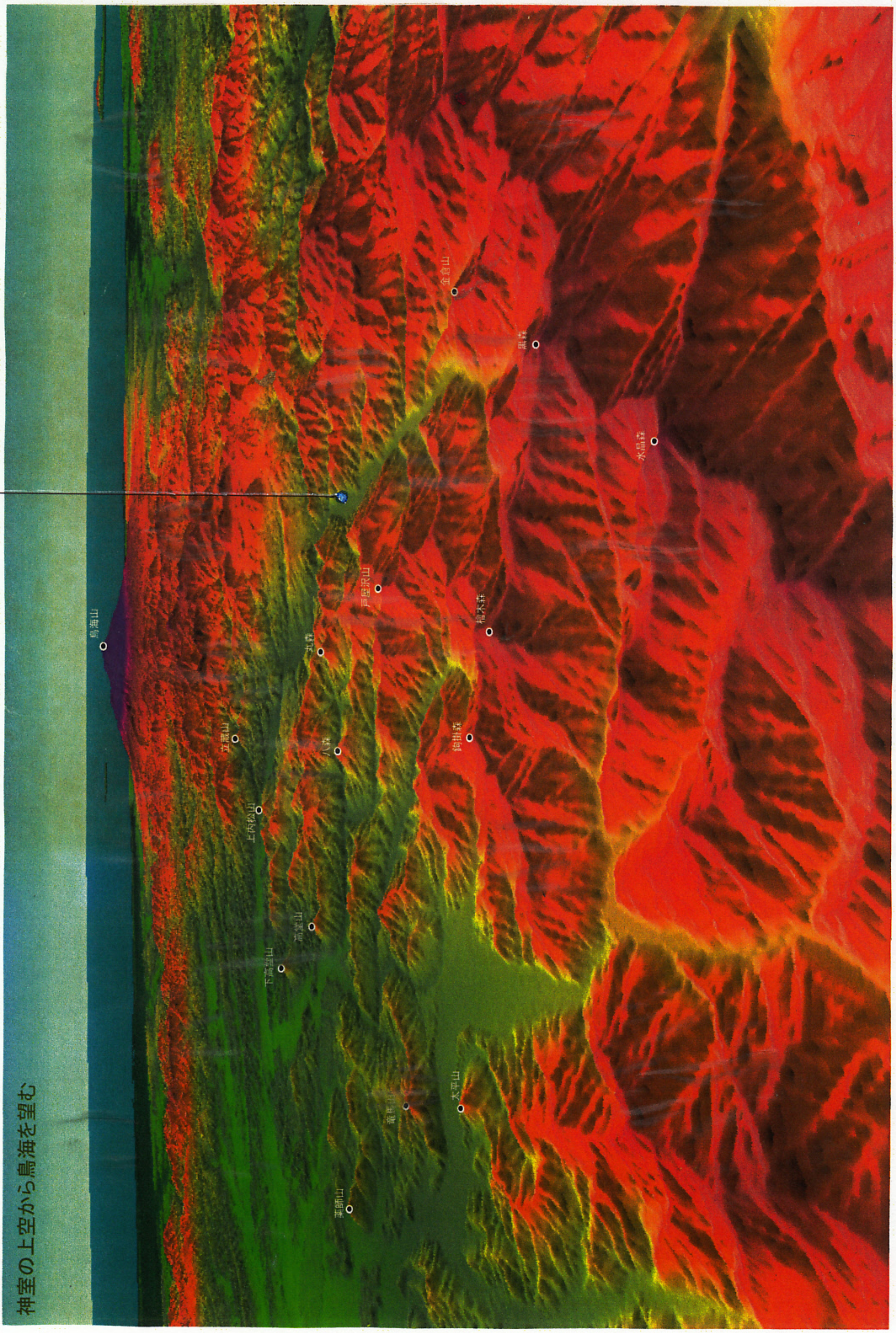


fig.219

【P437】小休止：Here am I.（その3）

● 小休止：Here am I.（その3）

Here am I.



神室の上空から鳥海を望む

fig.220